TỔNG HỢP BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

I.CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG ĐƯỢC SỬ DỤNG

① **Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)**

- $\forall\ a,\ b \ge 0,$ thì: $\boxed{a+b \ge 2\sqrt{a.b}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a=b$.
- $\forall\ a,\ b,\ c \ge 0,$ thì: $\boxed{a+b+c \ge 3.\sqrt[3]{a.b.c}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c$.

  Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow a.b \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② **Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiaxcôpki)**

- $\forall\ a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R},$ thì: $\boxed{(a.x+b.y)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.
- $\forall\ a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R},$ thì: $\boxed{(a.x+b.y+c.z)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$.

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

  Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x+b.y| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

Hệ quả. Nếu $a,\ b,\ c$ là các số thực và $x,\ y,\ z$ là các số dương thì:

$\boxed{\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}}$ và $\boxed{\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}}$: bất đẳng thức cộng mẫu số.

③ **Bất đẳng thức véctơ**

Xét các véctơ: $\vec{u}=(a;b),\ \vec{v}=(x;y)$. Ta luôn có: $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}|$

$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng.

④ **Một số biến đổi hằng đẳng thức thường gặp**

- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.
- $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$.
- $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$.
- $x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\right]$.
- $(a-b)(b-c)(c-a)=ab^2+bc^2+ca^2-(a^2b+b^2c+c^2a)$.
- $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.
- $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)-6abc}{a+b+c}$.
- $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.
- $\alpha.(a^2+b^2)+\beta.ab=\dfrac{2\alpha+\beta}{4}(a+b)^2+\dfrac{2\alpha-\beta}{2}(a-b)^2$ và $ab=\dfrac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{2}$.

⑤ **Một số đánh giá cơ bản và bất đẳng thức phụ**

Các đánh giá cơ bản thường được sử dụng (không cần chứng minh lại)

a. $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$.

b. $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz.$

c. $\forall\ x;\ y;\ z \in \mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} 3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2.$

d. $\forall\ x;\ y;\ z > 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \ge 3(x^2y+y^2z+z^2x).$

e. $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx).$

f. $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge xyz(x+y+z).$

g. $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z).$

h. $\forall\ x;\ y;\ z \in \mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \ge (xy+yz+zx)^2.$

i. $\forall\ x;\ y;\ z \in \mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)(xy+yz+zx) \le \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$

Các bất đẳng thức phụ thường được sử dụng(chứng minh lại khi áp dụng)

j. $\forall\ x;\ y \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} x^3+y^3 \ge \frac{1}{4}(x+y)^3.$

k. $\forall\ xy \ge 1 \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \ge \frac{2}{1+xy}$ và $\forall\ xy \le 1 \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}\cdot$

Suy ra: $\forall\ xy \ge 1 \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ và $\forall\ xy \le 1 \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \le \frac{2}{1+\sqrt{xy}}\cdot$

l. $\forall\ x;y \ge 1 \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy}\cdot$

m. $\forall\ x;\ y \in [0;1] \xrightarrow{suy\ ra} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}\cdot$

n. $\forall \begin{cases} x,\ y \ge 0 \\ x+y > 1 \end{cases} \xrightarrow{suy\ ra} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) \ge \left(\frac{2}{x+y}-1\right)^2\cdot$

Chứng minh các đánh giá cơ bản

a. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx.$

Áp dụng BĐT Cauchy: $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy \\ y^2+z^2 \ge 2\sqrt{y^2z^2} = 2yz \\ z^2+x^2 \ge 2\sqrt{z^2x^2} = 2zx \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx.$ Dấu "=" khi $x=y=z.$

b. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z \ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz.$

Áp dụng BĐT Cauchy $\begin{cases} x+y \ge 2\sqrt{xy} \\ y+z \ge 2\sqrt{yz} \\ z+x \ge 2\sqrt{zx} \end{cases} \overset{nhân}{\Rightarrow} (x+y)(y+z)(z+x) \ge \sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz.$ Dấu "=" khi $x=y=z.$

c. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z \in \mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} 3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2.$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số, ta được:

$x^2+y^2+z^2 = \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1} \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)}{3} \Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2.$ Dấu "=" khi $x=y=z.$

d. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z > 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \ge 3(x^2y+y^2z+z^2x).$

Ta có: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = (x^3+xy^2)+(y^3+yz^2)+(z^3+zx^2)+x^2y+y^2z+z^2x$

Áp dụng BĐT Cauchy cho từng dấu (…) ta được:

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\ge 2x^2y+2y^2z+z^2x+x^2y+y^2z+z^2x=3(x^2y+y^2z+z^2x).$ Dấu "=" khi $x=y=z.$

e. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z\ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx).$

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\ge 3(xy+yz+zx).$ Dấu "=" khi $x=y=z.$

f. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z\ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z).$

Đặt: $a=xy;\ b=yz;\ c=zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$: luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy (BĐT a.)

Dấu đẳng thức khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0.$

g. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z\ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} (xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z).$

Đặt: $a=xy;\ b=yz;\ c=zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$: luôn đúng theo BĐT e.

Dấu đẳng thức khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0.$

h. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z\in\mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge (xy+yz+zx)^2.$

Ta có: $3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=3\cdot\left[\dfrac{(xy)^2}{1}+\dfrac{(yz)^2}{1}+\dfrac{(zx)^2}{1}\right]\overset{Cauchy-Schwarz}{\ge}(xy+yz+zx)^2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z.$

i. Chứng minh: $\forall\ x;\ y;\ z\in\mathbb{R} \xrightarrow{suy\ ra} (x+y+z)(xy+yz+zx)\le \dfrac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x)\overset{Cauchy}{\ge} 2\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}=8xyz.$

Mặt khác: $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz+(x+y)(y+z)(z+x).$ Suy ra:

$(x+y+z)(xy+yz+zx)\le\left(\dfrac{1}{8}+1\right)(x+y)(y+z)(z+x)=\dfrac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z.$

Chứng minh các bất đẳng thức phụ

j. Chứng minh: $\forall\ x;\ y\ge 0 \xrightarrow{suy\ ra} x^3+y^3\ge\dfrac{1}{4}(x+y)^3.$

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^3+3x.y(x+y)\overset{Cauchy}{\ge}(x+y)^3+3.\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.(x+y)=\dfrac{(x+y)^3}{4}\cdot$ Dấu "=" khi $x=y.$

k. Chứng mnh: $\forall\ xy\ge 1 \xrightarrow{suy\ ra} \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\ge\dfrac{2}{1+xy}$ và $\forall\ xy\le 1 \xrightarrow{suy\ ra} \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}\cdot$

Chứng minh: $\forall xy\ge 1\Rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\ge\dfrac{2}{1+xy}$ (1)

Bất đẳng thức (1) tương đương với: $\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right)+\left(\dfrac{1}{1+y^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)}+\dfrac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\dfrac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$

$\Leftrightarrow(y-x)\cdot\dfrac{x(1+y^2)-y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\ge 0\Leftrightarrow(y-x)\cdot\dfrac{(x-y)+xy(y-x)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\ge 0$: đúng $\forall xy\ge 1.$ Dấu "=" khi $x=y$ hoặc $xy=1.$

Chứng minh: $\forall xy \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}$ (2)

Ta làm tương tự và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$ hoặc $xy=1$.

Suy ra: $\forall xy\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$ và $\forall xy\le 1\Rightarrow\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}\le\dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

Mở rộng: $\forall\ x;\ y;\ z\ge 1$ thì $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}\ge\dfrac{3}{1+xyz}$ (3)

Chứng minh: Ghép từng cặp xoay vòng, cộng lại. Dấu " = " khi và chỉ khi: $x=y=z=1$.

l. Chứng minh: $\forall\ x;y\ge 1 \xrightarrow{suy\ ra} \dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}$.

Ta có: $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+y}\right)^2+\dfrac{2}{(1+x)(1+y)}-\dfrac{1}{1+xy}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2}+\dfrac{1+xy-x-y}{(1+x)(1+y)(1+xy)}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2}+\dfrac{(x-1)(y-1)}{(1+x)(1+y)(1+xy)}\ge 0$: đúng $\forall x,y\ge 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

m. Chứng minh: $\forall\ x;\ y\in\left[0;1\right] \xrightarrow{suy\ ra} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Ta có: $1.\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+1.\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\overset{Cauchy-Schwarz}{\le}\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}}$ (1)

Mặt khác $\forall x,y\in(0;1)$, thì $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}$ (2)

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right)+\left(\dfrac{1}{1+y^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right)\le 0\Leftrightarrow\dfrac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)}+\dfrac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)}\le 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}+\dfrac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\le 0$: đúng $\forall xy\le 1$.

Từ (1), (2), suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$, $\forall x;y\in\left[0;1\right]$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x=y$.

n. Chứng minh: $\forall\ \begin{cases}x,\ y\ge 0\\ x+y>1\end{cases} \xrightarrow{suy\ ra} \left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{y}-1\right)\ge\left(\dfrac{2}{x+y}-1\right)^2$.

Ta có: $BĐT\Leftrightarrow\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}-\dfrac{4}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{1}{xy}-\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{(x-y)^2}{xy(x+y)^2}\ge\dfrac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$

$\Leftrightarrow(x-y)^2(1-x-y)\ge 0$: đúng với mọi $x+y<1$ và dấu "=" khi và chỉ khi: $x=y$.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2016

Câu 1: Cho a,b,c là các số thực thoả mãn $a,b,c\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P=\frac{2(ab+bc+ca)}{2(2a+b+c)+abc}+\frac{8}{2a(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}$

Trường THPT Anh Sơn 2 – Lần 2

Lời giải tham khảo

Vì $a,b,c\in[1;2]$ nên ta có $(a-1)(b-2)(c-2)\ge 0$

$\Leftrightarrow abc+2(2a+b+c)\ge 2(b+c)a+bc+4$

Dấu "=" xảy ra khi a = 1 hoặc b = 2 hoặc c = 2

Do đó và do $a\ge 1$ nên ta có

$$P=\frac{2(ab+bc+ca)}{2(2a+b+c)+abc}+\frac{8}{2a(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}$$

$$\le\frac{2(ab+bc+ca)}{2a(b+c)+bc+4}+\frac{8}{2a(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}=\frac{2a(b+c)+bc+4+bc+4}{2a(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}$$

$$=1+\frac{bc+4}{2a(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}\le 1+\frac{bc+4}{2(b+c)+bc+4}-\frac{b+c+4}{\sqrt{bc}+1}\le 1+\frac{bc+4}{bc+4\sqrt{bc}+4}-\frac{2\sqrt{bc}+4}{\sqrt{bc}+1}$$

Đặt $t=\sqrt{bc}\in[1;2]$. Xét hàm số $f(t)=1+\frac{t^2+4}{(t+2)^2}-\frac{2t+4}{t+1}$ trên $[1;2]$

$$f'(t)=\frac{4t-8}{(t+2)^2}+\frac{2}{(t+1)^2}\ge-\frac{4}{27}+\frac{2}{9}>0$$

nên $f(t)$ liên tục và đồng biến trên [1;2] Suy ra $P\le f(t)\le f(2)=-\frac{7}{6}$

Vậy, giá trị lớn nhất của $P=-\frac{7}{6}$ khi a =1 , b = c = 2.

Câu 2: Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}.$$

Trường THPT Bắc Yên Thành – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}\le\frac{3}{2}$$

Ta có $\dfrac{ab}{1-ab}=\dfrac{2ab}{2a^2+2b^2+2c^2-2ab}\le\dfrac{2ab}{a^2+b^2+2c^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki $\dfrac{a^2}{a^2+c^2}+\dfrac{b^2}{b^2+c^2}\ge\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\ge\dfrac{4ab}{a^2+b^2+2c^2}$.

Vậy $\dfrac{ab}{1-ab}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{a^2+c^2}+\dfrac{b^2}{b^2+c^2}\right)$.

Tương tự $\dfrac{bc}{1-bc}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{b^2+a^2}+\dfrac{c^2}{c^2+a^2}\right),\dfrac{ac}{1-ac}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{c^2+b^2}\right)$.

Cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=(x+y)(y+z)(z+x)+\dfrac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}$

Trường THPT Số 3 – Bảo Thắng – Lào Cai– Lần 1

Lời giải tham khảo

$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)\ xy+yz+zx\ -8$

Ta có : $a-b\ ^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow\ a+b+c\ ^2\ge 3\ ab+bc+ca\ \ *$. Thay

$a=xy;b=yz;c=zx$ vào (*)$\Rightarrow\ xy+yz+zx\ ^2\ge 3xyz\ x+y+z$

$\Rightarrow\ xy+yz+zx\ \ge 2\sqrt{6\ x+y+z}$

Do đó : $P\ge 2(x+y+z)\sqrt{6(x+y+z)}+\dfrac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}-8$

Đặt : $t=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=6 \Rightarrow P\ge 2t\sqrt{6t}+\dfrac{48}{\sqrt{3+t}}-8,(t=x+y+z,t\ge 6)$

Xét hàm số $f(t)=2t\sqrt{6t}+\dfrac{48}{\sqrt{3+t}}-8,(t\ge 6)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{3\sqrt{6t(t+3)^3}-24}{\sqrt{(t+3)^3}}\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\ge 6$

=> $f(t)$ đồng biến trên $[6;+\infty)$. Vậy $\underset{[6;+\infty)}{Min} f(t) = f(6) = 80$

Suy ra $P \geq 80$ dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$

Kết luận : Giá trị nhỏ nhất của P là 80 đạt được khi $x = y = z = 2$

Câu 4: Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{121}{14(ab + bc + ca)}$

Trường THPT Bình Minh – Ninh Bình – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \dfrac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.

Do đó $A = \dfrac{7}{a^2 + b^2 + c^2} - \dfrac{121}{7(1 - (a^2 + b^2 + c^2))}$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.
Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$

Mặt khác $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7}{t} + \dfrac{121}{7(1 - t)}$, $t \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right)$

$f'(t) = -\dfrac{7}{t^2} + \dfrac{121}{7(1 - t)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{18}$

BBT

t	$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{18}$		1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{324}{7}$	$\nearrow$	

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}$, $\forall t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi a,b,c thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = \frac{7}{18} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$ Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Câu 5: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$

Trường THPT Bố Hạ – Lần 2

Lời giải tham khảo:

Đặt $a = x-2, b = y-1, c = z \Rightarrow a,b,c > 0$

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Ta có $a^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Đặt $t = a+b+c+1 > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1;\ f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4} = \frac{81t^2-(t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$$

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^2 - (t+2)^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (do t>1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 0$

t	1		4		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

Từ BBT Ta có $\max f(x)=f(4)=\frac{1}{8}$

Vậy $\max P = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Rightarrow x=3;\ y=2;\ z=1$

Câu 6: Cho $\mathbf{x,y,z \neq 0}$ thoả mãn $\mathbf{x+y+z \neq 0}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbf{P = \frac{x^3+y^3+16z^3}{(x+y+z)^3}}$

Trường THPT Cam Ranh – Khánh Hoà– Lần 1

Lời giải tham khảo

Trước hết ta chứng minh được: $\mathbf{x^3+y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}}$

Đặt $x+y+z = a$. Khi đó $\mathbf{4P \geq \frac{(x+y)^3+64z^3}{a^3} = \frac{(a-z)^3+64z^3}{a^3} = (1-t)^3+64t^3}$ (với $t = \mathbf{\frac{z}{a};0<t<1}$)

Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 64t^3$ với $t \in \mathbf{[0;1]}$.

Có : $\mathbf{f'(t) = 3\left[64t^2-(1-t)^2\right], f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{9} \in [0;1]}$. Lập bảng biến thiên

$\Rightarrow \mathbf{\underset{[0;1]}{Min} f(t) = \frac{64}{81}} \Rightarrow$ GTNN của P là $\mathbf{\frac{16}{81}}$ đạt được khi $x = y = 4z > 0$

Câu 7: Cho x, y, z là các số thực dương lớn hơn 1 và thoả mãn điều kiện: $\mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2}$

. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\mathbf{A = (x-1)(y-1)(z-1)}$

Trường THPT Cam Ranh – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $\mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2}$, nên : $\mathbf{\frac{1}{x} \geq (1-\frac{1}{y})+(1-\frac{1}{z}) = (\frac{y-1}{y})+(\frac{z-1}{z}) \geq 2\sqrt{\frac{(y-1)(z-1)}{yz}}}$ **(1)**

$$\mathbf{\frac{1}{y} \geq (1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{z}) = (\frac{x-1}{x})+(\frac{z-1}{z}) \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(z-1)}{xz}}} \quad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{\frac{1}{z} \geq (1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{y}) = (\frac{x-1}{x})+(\frac{y-1}{y}) \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(y-1)}{xy}}} \quad \mathbf{(3)}$$

Nhân vế với vế của (1), (2), (3) ta được $\mathbf{(x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{8}}$

Vậy $A_{max} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2}$

Câu 8: Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} - \frac{3}{4}(a+b)^2$

Trường THPT Cao Lãnh 2 – Đồng Tháp – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}$

Tương tự: $\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4b^2}{9(c+a)^2}$

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2}\right) \ge \frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}\right)^2$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{ab+c(a+b)+c^2}\right)^2 \ge \frac{2}{9}\left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c^2}\right)^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right)^2$$

Vì $a+b+c=1 \Leftrightarrow a+b=1-c$ nên ta có

$$P \ge \frac{2}{9}\left(\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 \ (1)$$

Xét hàm số
$$f(c) = \frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2, c \in (0;1)$$
$$f'(c) = \frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)\frac{2}{(c+1)^2} - \frac{3}{2}(c-1);\ f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	

Dựa vào BBT ta có $f(c) \ge -\frac{1}{9}, \forall c \in (0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq -\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{9}$

Câu 9: Với x, y, z là các số thực đôi một phân biệt. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\left(\frac{2x-y}{x-y}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-z}\right)^2+\left(\frac{2z-x}{z-x}\right)^2$.

Trường THPT Chuyên KHTN – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a=\frac{x}{x-y}; b=\frac{y}{y-z}; c=\frac{z}{z-x}$. Suy ra $a-1=\frac{y}{x-y}; b-1=\frac{z}{y-z}; c-1=\frac{x}{z-x}$.

$\Rightarrow abc=(a-1)(b-1)(c-1) \Leftrightarrow a+b+c=(ab+bc+ca)+1$.

Ta có: $M=(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)+3$.

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+3=(a+b+c)^2+5 \geq 5$.

Vậy Min M = 5 khi a + b + c = 0, chẳng hạn x = 1; y = 2; z = 0.

Câu 10: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^3+z^4 \geq x^3+y^4+z^5$, chứng minh rằng $x^3+y^3+z^3 \leq 3$

Trường THPT Chuyên KHTN– Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^3+z^4 \geq x^3+y^4+z^5$, chứng minh rằng $x^3+y^3+z^3 \leq 3$

Giả thiết có thể viết lại là $(x^3-x^2)+(y^4-y^3)+(z^5-z^4) \leq 0$. Ta sẽ chứng minh các bất đẳng thức sau

$x^3-1 \leq 3(x^3-x^2)(1)$

$y^3-1 \leq 3(y^4-y^3)(2)$

$z^3-1 \leq 3(z^5-z^4)(3)$

Thật vậy, các bất đẳng thức (1), (2), (3) lần lượt tương đương với các bất đẳng thức đúng dưới đây

$(x-1)^2(2x+1) \geq 0, (y-1)^2(3y^2+2y+1) \geq 0, (z-1)^2(3z^3+2z+1) \geq 0$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) và sử dụng giả thiết được viết lại, ta có ngay điều phải chứng minh.

thức :

Câu 11: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a^2+ab+b^2=c\ \ a+b+c$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(a+c)^2}{2a^2+2ac+c^2}+\frac{(b+c)^2}{2b^2+2bc+a^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{ab}{a^2+4bc+b^2}$$

Trường THPT Chuyên KHTN – Lần 3

Lời giải tham khảo

Bổ đề : Cho $x,y>0; xy\le 1$ khi đó : $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\le\frac{2}{1+xy}$ (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{(xy-1)(x-y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}\le 0$ (Luôn đúng)

$$\frac{(a+c)^2}{2a^2+2ac+c^2}+\frac{(b+c)^2}{2b^2+2bc+a^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{a+c}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2}\le\frac{2}{1+\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$$

Đặt $t=\frac{(a+c)(b+c)}{ab}=\frac{ab+c(a+b+c)}{ab}=\frac{(a+b)^2}{4}\ge 4$ thì $P\le f(t)$, $f(t)=\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2}$

Ta có : $f'(t)=\frac{2}{(1+t)^2}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+2)^2}<0$ do $\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+2)^2}\ge\frac{2}{t(t+2)}>\frac{2}{(t+1)^2}$

Suy ra : $f(t)\le f(4)=\frac{121}{60}$ Dấu bằng xảy ra khi $t=4 \Rightarrow a=b=c$. Vậy : $P_{max}=\frac{121}{60}$

Câu 12: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
$P = 3(x + y + z) + 2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Trước hết ta có: $(x-1)^2(x-4)\le 0$,$\forall x<\sqrt{3}$ (dấu "=" xảy ra tại x = 1)

Hay : $x^2+9\le 6x+\frac{4}{x}\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+9)\le 3x+\frac{2}{x}$ (1)

Tương tự ta cũng có $\frac{1}{2}(y^2+9)\le 3y+\frac{2}{y}$ (2)

$\frac{1}{2}(z^2+9)\le 3z+\frac{2}{z}$ (3)

Cộng (1),(2) và (3) vế theo vế cuối cùng ta có: $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+27)\le P$

Vậy minP = 15 $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1

Câu 13: Cho $x,\ y,\ z$ là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$.

Trường THPT Chuyên Nguyễn Huệ – Lần 1

Lời giải tham khảo

▪ Giả sử $x=\min\{x;y;z\}$ suy ra $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

Ta có: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]$$

$$=3xyz+\frac{27}{8}-\frac{9(xy+yz+zx)}{2}$$

Ta có:

$$P=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2=x^2y^2z^2+3xyz+\frac{27}{8}-\frac{9}{2}(xy+yz+zx)$$

$$=\left(xyz-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}+\frac{13}{4}xyz+\frac{27}{8}-\frac{9}{2}(xy+yz+zx)$$

$$\geq\frac{215}{64}-\frac{9}{2}(xy+zx)-yz\left(\frac{9}{2}-\frac{13}{4}x\right)$$

Vì $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow\dfrac{9}{2}-\dfrac{13}{4}x\geq 0\Rightarrow -yz\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{13}{4}x\right)\geq-\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{13}{4}x\right)$

Suy ra $P\geq\dfrac{215}{64}-\dfrac{9}{2}x\left(\dfrac{3}{2}-x\right)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{13}{4}x\right)$

Xét $f(x)=\dfrac{215}{64}-\dfrac{9}{2}x\left(\dfrac{3}{2}-x\right)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{13}{4}x\right), x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f(x)\geq f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{25}{64}$

Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{25}{64}$ đạt khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Cho $x,\ y,\ z>0$ và $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=9(xy+2yz+zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}$.

Trường THPT Chuyên Nguyễn Huệ – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $y+z=t\ (t>0); y^2+z^2\ge\frac{t^2}{2}; yz\le\frac{t^2}{4}$

$$5\left(x^2+y^2+z^2\right)=9\left(xy+2yz+xz\right)\Leftrightarrow 5x^2+5\left(y+z\right)^2-9x\left(y+z\right)=28yz$$

$$\Rightarrow 5x^2+5t^2-9xt\le 7t^2\Leftrightarrow\left(5x+t\right)\left(x-2t\right)\le 0\Leftrightarrow x\le 2t$$

$P\le\frac{2x}{t^2}-\frac{1}{27t^3}$ với $t>0$

$f'(t)=-\frac{4}{t^2}+\frac{1}{9t^4}$

$\begin{cases} f'(t)=0 \\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$

Lập bảng biến thiên suy ra GTLN của P bằng 16 đạt được tại $x=\frac{1}{3}; y=z=\frac{1}{12}$

Câu 15: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x>y; (x+z)(y+z)=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}$

Trường THPT Chuyên Sơn La – Lần 1

Lời giải tham khảo

$a=x+z\Rightarrow y+z=\frac{1}{a}$.

$x>y\Rightarrow x+z>y+z\Rightarrow a>\frac{1}{a}\Rightarrow a>1$

$x-y=x+z-(y+z)=\frac{a^2-1}{a}$

Thay vào P được:

$$P=\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+\frac{4}{a^2}+4a^2$$

$$P=\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+3a^2+\frac{4}{a^2}+a^2\ge\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+3a^2+4$$

Xét $f(t)=\frac{t}{(t-1)^2}+3t+4;\ t=a^2>1$

$$f'(t)=\frac{-t-1}{(t-1)^3}+3;\quad f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{3t^3-9t^2+8t-4}{(t-1)^3}=0\Leftrightarrow t=2;\ (t>1)$$

T	1	2	$+\infty$
f′	-	0	+
F	↘	12	↗

$\underset{t>1}{Min}\, f(t)=12$. Vậy $Min\,P=12$ khi $x+z=\sqrt{2}; y+z=x-y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 16: Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}2y\ge x^2\\ y\le -2x^2+3x\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^4+y^4+\frac{2}{(x+y)^2}$

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có $y\ge 0$ và $\frac{x^2}{2}\le -2x^2+3x\Rightarrow 0\le x\le\frac{6}{5}$ và $x^2+y^2\le x^2+\left(-2x^2+3x\right)^2=2x^2\left(2x^2-6x+5\right)$

Xét hàm số $f(x)=2x^2\left(2x^2-6x+5\right); x\in\left[0;\frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0;\frac{6}{5}\right]}{Max}\, f(x)=2\ \Rightarrow x^2+y^2\le 2$

$$P=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+\frac{2}{(x+y)^2}\ge\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}+\frac{2}{x^2+y^2}$$

Đặt $t=x^2+y^2\Rightarrow P\ge\frac{t^2}{2}+\frac{2}{t}$ $,0<t\le 2$

Xét hàm số:

$$g(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{2}{t}, t\in(0;2]$$

$$g'(t)=t-\frac{1}{t^2}=\frac{t^3-2}{t^2}; g'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có $Min\,P = \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ $khi\; x = y = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Câu 17: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $T = \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a} - \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$T = \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} + \frac{4}{1-c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{5a-1}{a-a^2} + \frac{5b-1}{b-b^2} + \frac{5c-1}{c-c^2}$$

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng $1 \Rightarrow a,b,c \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Ta có $\dfrac{5a-1}{a-a^2} - (18a-3) = \dfrac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2} \le 0$, $\forall a \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Từ đó suy ra : $\dfrac{5a-1}{a-a^2} \le 18a-3, \forall a \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:

$\dfrac{5b-1}{b-b^2} \le 18b-3, \forall b \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ và $\dfrac{5c-1}{c-c^2} \le 18c-3, \forall c \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có :

$$T = \frac{5a-1}{a-a^2} + \frac{5b-1}{b-b^2} + \frac{5c-1}{c-c^2} \le 18(a+b+c) - 9 = 9.$$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3} \Rightarrow T_{max} = 9$ đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Vậy Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1, thì giá trị lớn nhất của biểu thức : $T = \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a} - \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$ bằng 9 và đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

<u>Chú ý:</u> Để có được bất đẳng thức $\dfrac{5a-1}{a-a^2} \le 18a-3, \forall a \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ ta đã sử dụng phương pháp tiếp tuyến

Câu 18: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $x+y=2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \sqrt{5x^2+xy+3y^2} + \sqrt{3x^2+xy+5y^2} + \sqrt{x^2+xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+xy+y^2}$

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Lần 3

Lời giải tham khảo

$P = A + B$. Trong đó $A = \sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2}$ và $B = \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$

$\Rightarrow A \ge 3(x + y) = 3 \cdot 2016 = 6048$ $(*)$ dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$

$6A = \sqrt{180x^2 + 36xy + 108y^2} + \sqrt{108x^2 + 36xy + 180y^2}$

$= \sqrt{(11x + 7y)^2 + 59(x - y)^2} + \sqrt{(11y + 7x)^2 + 59(y - x)^2} \quad \ge (11x + 7y) + (11y + 7x) = 18(x + y)$

$\Rightarrow B \ge 2(x + y) = 2 \cdot 2016 = 4032$ $(**)$ dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$

$4B = \sqrt{16x^2 + 16xy + 32y^2} + \sqrt{32x^2 + 16xy + 16y^2}$

$= \sqrt{(3x + 5y)^2 + 7(x - y)^2} + \sqrt{(3y + 5x)^2 + 7(y - x)^2} \quad \ge (3x + 5y) + (3y + 5x) = 8(x + y)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta đươc $P = A + B \ge 6048 + 4032 = 10080$, dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = 1008$. Vậy $P_{\min} = 10080 \Leftrightarrow x = y = 1008$

Câu 19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\dfrac{a+b+c}{2016}\right)^2 \le 4abc.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \dfrac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \dfrac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}}.$

Trường THPT Chuyên Hạ Long – Lần 2

Lời giải tham khảo

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$P \le \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}}\right).$$

Với các số thực x, y, z, ta có $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2$.

Do đó $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{ca}}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right) = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}}$. Suy ra $P \le \dfrac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$.

Từ giả thiết, ta có $a + b + c \le 4032\sqrt{abc}$. Do đó $P \le 2016$

Với $a = b = c = \dfrac{1}{1344^2}$, ta có $P = 2016$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2016.

Câu 20: Cho hai số dương x, y phân biệt thỏa mãn: $x^2+2y=12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{x^4}+\frac{4}{y^4}+\frac{5}{8(x-y)^2}$.

Trường THPT Chuyên Long An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện, dùng bất đẳng thức côsi suy ra: $0<xy\le 8$.

Đánh giá $P\ge\frac{1}{16}.\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}(t>2)$. Khi đó $P\ge\frac{1}{16}.(t^2-2)+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{16}.t^2+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}-\frac{1}{8}$ (với t > 2)

Tính đạo hàm, vẽ bảng biến thiên, tìm được:

$\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{27}{64}$

Tìm được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{64}$ khi x = 2 và y = 4

Câu 21: Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa $5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2(a+b+c)}-(b^2+c^2)$

Trường THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành– Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện suy ra $a+b+c\le 2(b+c)$

$P\le 2t-\frac{1}{2}t^4, t=\sqrt{b+c}$ $\max P=\frac{3}{2}, a=1, c=b=\frac{1}{2}$

Câu 22: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $8(a^2+b^2+c^2)=3(a+b+c)^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a(1-a^3)+b(1-b^3)+c$.

Trường THPT Đa Phúc – Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

+) Từ giả thiết ta có: $5c^2-6(a+b)c+(a+b)^2\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a+b)\le c\le a+b$.

+) Ta có $a^4+b^4 \ge \frac{1}{8}(a+b)^4 \forall a,b$ => P $\le 2(a+b)-\frac{1}{8}(a+b)^4$

+) Xét $f(t)=2t-\frac{t^4}{8}$ $(t\ge 0)$, $f'(t)=2-\frac{t^3}{2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$

+) BBT:...

T	0		$\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$	↘	

+) MaxP = $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ c=\sqrt[3]{4} \end{cases}$.

Câu 23: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2}+\frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2}$.

Trường THPT Đa Phúc – Hà Nội – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=4 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Rightarrow a,b,c\in(0;2)$ và $a^2+b^2+c^2=4 \Leftrightarrow b^2+c^2=4-a^2 \ldots$

Do đó $P=\frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2}+\frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}a}{4-a^2}+\frac{\sqrt{3}b}{4-b^2}+\frac{\sqrt{3}c}{4-c^2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3}+\frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3}$

Vì $a,b,c>0$.

Xét hàm số $f(x)=4x-x^3$ với $x\in(0;2)$. Có

$f'(x)=4-3x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$, $f(0)=0$, $f(2)=0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;2)$ là

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$		
$f(x)$					$\|\|$ 0	$\nearrow$	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0 $\|\|$		

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=4\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Từ bảng biến thiên ta có $0<f(x)\le\frac{16\sqrt{3}}{9},\forall x\in(0;2)$.

Tức $0<4x-x^3\le\frac{16\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\frac{1}{4x-x^3}\ge\frac{9}{16\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}x^2}{4x-x^3}\ge\frac{9\sqrt{3}x^2}{16\sqrt{3}},\forall x\in(0;2)$.

Dấu "=" khi $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng ta có

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3}\ge\frac{9\sqrt{3}a^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9a^2}{16};\frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3}\ge\frac{9\sqrt{3}b^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9b^2}{16};\frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3}\ge\frac{9\sqrt{3}c^2}{16\sqrt{3}}=\frac{9c^2}{16},(a,b,c\in(0;2))$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P\ge\frac{9a^2}{16}+\frac{9b^2}{16}+\frac{9c^2}{16}=\frac{9}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{9}{4}.$$

Và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{9}{4}$ đạt được, khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{a+c-b}+\frac{5}{a+b-c}$

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}, x>0, y>0.$

$$S=\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$$

suy ra $S\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}.$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a$, nên $\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}=2\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\right)=2\left(a+\frac{3}{a}\right)\ge4\sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

Câu 25: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2+c^2b^2+1\le3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

- Ta có: $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2b}+1\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

- Đặt $d=\frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2+c^2b^2+1\le3b$ trở thành $a^2+c^2+d^2\le3d$

Mặt khác: $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{8}{\left(a+\frac{d}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

$$\ge\frac{64}{\left(a+\frac{d}{2}+c+5\right)^2}=\frac{256}{(2a+d+2c+10)^2}$$

- Mà: $2a+4d+2c\le a^2+1+d^2+4+c^2+1=a^2+d^2+c^2+6\le3d+6$

Suy ra: $2a+d+2c\le6$

- Do đó: $P\ge1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a=1, c=1, b=\frac{1}{2}$

Câu 26: Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}}-\frac{4}{8+a+2b+3c}+\frac{1}{4+b+2c}$.

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

Ta có $2\sqrt{2bc} \le b+2c \Rightarrow \dfrac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \ge \dfrac{1}{4a+4b+4c}$

và $\dfrac{-4}{8+a+2b+3c} \ge \dfrac{-1}{4+a+b+c} + \dfrac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P \ge \dfrac{1}{4(a+b+c)} + \dfrac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t=a+b+c,\ t>0$

Xét $f(t) = \dfrac{1}{4t} + \dfrac{-1}{4+t}$, $t>0$, $f'(t) = -\dfrac{1}{4t^2} + \dfrac{1}{(4+t)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4$.

T	0		4		$+\infty$
F'		-	0	+	
f	↘		$-\dfrac{1}{16}$		↗

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b=2c \\ a+b+c=b+2c \\ a+b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Câu 27: Cho a,b,c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{a+3c}{a+2b+c} + \dfrac{4b}{a+b+2c} - \dfrac{8c}{a+b+3c}$.

Trường THPT Phước Bình- Bình Phước – Lần 4

Lời giải tham khảo:

Đặt $\begin{cases} x=a+2b+c \\ y=a+b+2c \\ z=a+b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+5y-3z \\ b=x-2y+z \\ c=-y+z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) - 17$$

$$P \ge 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b=\left(1+\sqrt{2}\right)a, c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2}-17$.

Câu 28: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab\ge 1$; $c\left(a+b+c\right)\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{b+2c}{1+a}+\dfrac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$.

Trường THPT Phước Bình – Bình Phước – Lần 5

Lời giải tham khảo

$$P+2=\frac{a+b+2c+1}{1+a}+\frac{a+b+2c+1}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$$
$$=\left(a+b+2c+1\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)+6\ln(a+b+2c)$$

Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau:

$+)\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (1)

$+)\sqrt{ab}\le\dfrac{ab+1}{2}$ (2)

Thật vậy,

$+)\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\left(2+a+b\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)\ge 2\left(1+a\right)\left(1+b\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)\ge 0$ luôn đúng vì $ab\ge 1$. Dấu "=" khi a=b hoặc ab=1

$+)\sqrt{ab}\le\dfrac{ab+1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{ab}-1\right)^2\ge 0$. Dấu "=" khi ab=1.

Do đó, $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\ge\dfrac{2}{1+\dfrac{ab+1}{2}}=\dfrac{4}{3+ab}$

$$\ge\frac{4}{ab+bc+ca+c^2}=\frac{4}{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}\ge\frac{16}{\left(a+b+2c\right)^2}$$

Đặt $t=a+b+2c, t>0$ ta có:

$$P+2\ge f(t)=\frac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t, t>0;$$

$$f'(t)=\frac{6}{t}-\frac{16(t+2)}{t^3}=\frac{6t^2-16t-32}{t^3}=\frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

BBT

t	0		4		$+\infty$
f′(t)		-	0	+	
f(t)		↘	5+6ln4	↗	

Vậy, GTNN của P là +6ln4 khi a=b=c=1.

Câu 29: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2$.

Tìm Min P, với $P=\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2\Rightarrow ab\ge a+b$

$$a^2+b^2+1=(a+b)^2-2ab+1\le(a+b)^2-2(a+b)+1=(a+b-1)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2+1}\le|a+b-1|$$

$$P=\left(\frac{a}{b+1}+1\right)+\left(\frac{b}{a+1}+1\right)-2+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=(a+b+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}-2$$

$$\ge(a+b+1)\frac{4}{a+b+2}+\frac{1}{|a+b-1|}-2$$

Đặt $t=a+b$, ta có $(a+b)^2\le2\left(a^2+b^2\right)=(ab)^2\le\frac{(a+b)^4}{16}\Rightarrow a+b\ge4$

Xét $f(t)=\frac{4(t+1)}{t+2}+\frac{1}{t-1}-2; t\ge4$ ta được $MinP=M\inf(x)=\frac{5}{3}khi\ x=y=2$

Câu 30: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+2b>c$ và $a^2+b^2+c^2-2=ab+bc+ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}-\dfrac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$2+ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc$$

$$\Rightarrow 2(ab+ac+1)\ge a^2+ab+bc+ca \qquad \Rightarrow 2(ab+ac+1)\ge (a+b)(a+c)$$

$$\Rightarrow ab+ac+1\ge \frac{(a+b)(a+c)}{2} \qquad \Rightarrow a(b+c)+a+b+1\ge \frac{(a+b)(a+c)}{2}+(a+b)$$

$$\Rightarrow a(b+c)+a+b+1\ge \frac{(a+b)(a+c+2)}{2}\Rightarrow \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}\le \frac{2}{a+b}$$

$$(a+c)(a+2b-c)\le \frac{1}{4}(a+c+a+2b-c)^2=(a+b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}\ge \frac{a+b+1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}$$

Khi đó $P\le \dfrac{2}{a+b}-\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{(a+b)^2};t=\dfrac{1}{a+b}>0$

Xét hàm số $f(t)=t-t^2;t>0,f'(t)=1-2t,f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: $MaxP=\dfrac{1}{4},khi\ a=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},b=c=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Câu 31: Cho a, b là các số thực thỏa mãn : $a+b=2\sqrt{a+2}+3\sqrt{b-2014}+2012$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $T=(a-1)^2+(b-1)^2+\dfrac{2015+2ab\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{a+b+1}}$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$T=(a+b+1)^2-4(a+b+1)+5+\frac{2015}{\sqrt{a+b+1}}$$

Max = $T=4096577+\dfrac{2015}{\sqrt{2026}}$

Min = $T=4044122+\dfrac{2015}{\sqrt{2013}}$

Câu 32: Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước– Lần 2

Lời giải tham khảo

$$a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+1)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(c+1)^2\right]\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3=\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

Vậy $P\le\dfrac{2}{a+b+c+1}-\dfrac{54}{(a+b+c+3)^3}$

$=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+2)^3}=f(t)$ với $t=a+b+c+1$ $(t>1)$

$$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4};\quad f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=1(loai)\end{array}\right.$$

t	1		4		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	$\nearrow$	1/4	$\searrow$	0

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 33: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc} \le a + \frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4}.\frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$.

Suy ra $P \ge \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Đặt $t = a+b+c, t>0$. Khi đó ta có: $P \ge \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t>0$ ta có $f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

Do đó ta có $\min\limits_{t>0} f(t) = -\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $t = 1$

Vậy ta có $P \geq -\dfrac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{16}{21}, b = \dfrac{4}{21}, c = \dfrac{1}{21}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left(\dfrac{16}{21}, \dfrac{4}{21}, \dfrac{1}{21}\right)$.

Câu 34: Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

Trường THPT Chuyên Quang Trung – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Giả thiết cho $2(a^4+b^4)+8c^2 = 9(a^2+b^2)c \Leftrightarrow \boxed{c \leq a^2+b^2 \leq 8c}$

Ta có:

$$P \leq \frac{(b+c)^2(a+c-2c)}{a+c} + \frac{(a+c)^2(b+c-2c)}{b+c} + 16\sqrt{c+1} = (b+c)^2 - 2c\left(\frac{(b+c)^2}{a+c} + \frac{(a+c)^2}{b+c}\right) + 16\sqrt{c+1}$$

$$\overset{BCS}{\leq} (b+c)^2 + (a+c)^2 - 2c(a+b+2c) + 16\sqrt{c+1} \leq 8c - 2c^2 + 16\sqrt{c+1}$$

Xét hàm $f(c) = 8c - 2c^2 + 16\sqrt{c+1}$ với $c \in (0;+\infty)$ có $f(c) = 0 \Leftrightarrow c = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{max} = 38$ khi $c = 3 \Rightarrow a = b = 2\sqrt{3}$.

Câu 35: Cho a,b,c thuộc đoạn $[1,2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{4b+4c} + \frac{(b+c)^2+2bc}{c^2+4bc}$$

Trường THPT Quang Trung – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có: $P = \dfrac{a}{4b+4c} + \dfrac{b^2}{c^2+4bc} + 1 = \dfrac{a^2}{4ba+4ac} + \dfrac{b^2}{c^2+4bc} + 1 \geq \dfrac{(a+b)^2}{c^2+4ab+4c(a+b)} + 1$

$$\geq \frac{(a+b)^2}{c^2+(a+b)^2+4c(a+b)} + 1 = \frac{t^2}{t^2+4t+1} = f(t),\ t = \frac{a+b}{c} \in [1;4]$$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{2t+4t^2}{(t^2+4t+1)^2}>0$

$P\ge f(1)=\dfrac{1}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\dfrac{c}{2}$.

Câu 36: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x\ge y\ge z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+3y$.

Trường THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $\dfrac{x}{z}+xz\ge 2x,\quad \dfrac{z}{y}+yz\ge 2z$.

Từ đó suy ra $P=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+3y\ge 2x-xz+2z-yz+3y$

$$=2(x+z)+y(x+y+z)-xz-yz=2(x+z)+y^2+x(y-z)$$

Do $x>0$ và $y\ge z$ nên $x(y-z)\ge 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$P=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+3y\ge 2(x+z)+y^2=2(3-y)+y^2=(y-1)^2+5\ge 5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x=y=z=1$

Câu 37: Cho ba số thực x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2\le 2x-4y-1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2(x+z)-y$.

Trường THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$x^2+y^2+z^2\le 2x-4y-1\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2\le 4 \qquad (1)$$

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Xét mặt cầu:

$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$. Có tâm $I(1;-2;0)$,bán kính $R=2$.

Xét mp $(\alpha):2x-y+2z-T=0$

G/s $M(x;y;z)$. Từ (1) có điểm M nằm bên trong (S) và kể cả trên mặt cầu (S)

$\Rightarrow d(I,(\alpha))\le R\Leftrightarrow \dfrac{|4-T|}{3}\le 2\Leftrightarrow -2\le T\le 10$

- Với $T=-2$ thì M là giao điểm của mp(β): $2x-y+2z+2=0$

Và đường thẳng Δ đi qua I và $\perp(\beta)$.

$$\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=2t\end{cases}\qquad\Rightarrow M\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

Với $T=10$. Tương tự $M\left(\frac{7}{3};-\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vậy $\min T=-2$ khi $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=z=-\frac{4}{3}\end{cases}$ $\quad\max T=10$ khi $\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=-\frac{8}{3}\\z=\frac{4}{3}\end{cases}$

Câu 38: Cho ba số thực dương x,y,z. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{9}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}$$

Trường THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

* $x^2+y^2+z^2+4=\frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)+(x^2+y^2)+(z^2+4)+(z^2+4)\right]\ge\frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)+2xy+(z^2+2^2)+2z\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(z+2)^2\right]\ge\frac{1}{4}\left[(x+y)^2+(z+2)^2+2(x+y)(z+2)\right]\ge\frac{1}{4}(x+y+z+2)^2$

* $(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\le(x+y)\frac{1}{2}(x+y+4z)=\frac{1}{6}(3x+3y)(x+y+4z)$ (1)

Vì $\sqrt{(3x+3y)(x+y+4z)}\le\frac{1}{2}(3x+3y+x+y+4z)=2(x+y+z)$ nên

$(1)\Leftrightarrow(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\le\frac{4}{6}(x+y+z)^2$

Vậy $P\le\frac{8}{x+y+z+2}-\frac{27}{2(x+y+z)^2}$

Đặt $t=x+y+z$, xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=-\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}$ $f'(t)=\frac{-8t^3+2t^2+108t+108}{t^3(t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=6\Rightarrow f(6)=\frac{5}{8}$

t	0		6		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	

Vậy $P \le \frac{5}{8}$. Suy ra $\max P = \frac{5}{8}$ khi $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 39: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Trường THPT Hà Huy Tập – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Từ giả thiết $x^2(y+z) \ge 2x^2\sqrt{yz} = 2x^2.\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}$

Tương tự: $y^2(z+x) \ge 2y\sqrt{y}$; $z^2(x+y) \ge 2z\sqrt{z}$

Khi đó $A \ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

Đặt $\begin{cases} a = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y} \\ b = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z} \\ c = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9} \\ y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9} \\ z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9} \end{cases}$

Bất đẳng thức trở thành: $A \ge \frac{2}{9}\left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a}\right)$

$$= \frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) - 6\right] \ge 2$$

Kết luận Min A = 2 khi x = y = z =1.

Câu 40: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\in[0;1],b\in[0;2],c\in[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c}+\dfrac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\dfrac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$.

Trường THPT Anh Sơn 2 – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $a\in[0;1],b\in[0;2],c\in[0;3]\Rightarrow\begin{cases}(1-a)(b+c)\ge 0\\(2-b)(a+c)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c\ge ab+ac\\2a+2c\ge ab+bc\end{cases}\Rightarrow 2a+b+3c\ge 2ab+bc+ac$

(1)

$$\Rightarrow\frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c}\le\frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2ab+ac+bc}$$

Mặt khác $b+c\ge a(b+c)$ vì $a\in[0;1]$, suy ra

$$\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}\le\frac{8-b}{a(b+c)+b(a+c)+8}=\frac{8-b}{2ab+bc+ac+8}$$

Với mọi số thực x, y, z ta có $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)\ge 2xy+2yz+2zx$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$ (2). Áp dụng (2) và (1) ta có

$$\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}=\sqrt{3[(2a)^2+b^2+(3c)^2]}\ge\sqrt{(2a+b+3c)^2}=2a+b+3c\ge 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow\frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}\le\frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

Suy ra $P\le\dfrac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac}+\dfrac{8-b}{2ab+bc+ac+8}+\dfrac{b}{2ab+bc+ac+8}$

$\Rightarrow P\le\dfrac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac}+\dfrac{8}{2ab+bc+ac+8}$. Đặt $t=2ab+bc+ac$ với $t\in[0;13]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t}{t+1}+\dfrac{8}{t+8};t\in[0;13]$ có $f'(t)=\dfrac{2}{(t+1)^2}-\dfrac{8}{(t+8)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

Tính $f(0)=1;f(6)=\dfrac{16}{7};f(13)=\dfrac{47}{21}\Rightarrow f(t)\le\dfrac{16}{7},\forall t\in[0;13]$ và $f(t)=\dfrac{16}{7}$ khi $t=6$. Do đó $P\le\dfrac{16}{7}$.

Khi $a=1;b=2;c=\dfrac{2}{3}$ thì $P=\dfrac{16}{7}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{16}{7}$.

Câu 42: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2x$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+z}{x+2y+1}+\dfrac{z}{y+1}-\dfrac{4x^2}{(x+y)^2}$

Trường THPT Thực Hành Cao Nguyên – Tây Nguyên– Lần 1

Lời giải tham khảo

GT $\Rightarrow 2x+2xy=z^2+(x+y)^2\geq 2z(x+y)\to x+xy\geq xz+yz$ (1)

Dấu bằng khi $x+y=z$

Từ (1) và x, y, z dương suy ra $\dfrac{z}{y+1}\leq\dfrac{x}{y+1},\dfrac{x+z}{x+2y+1}\leq\dfrac{x}{x+y}$

$$\Rightarrow P\leq\frac{2x}{x+y}-4\left(\frac{x}{x+y}\right)^2$$

Đặt $t=\dfrac{x}{x+y}>0\to P\leq 2t-4t^2$. Xét hàm số $f(t)=2t-4t^2, 0<t<1$

Lập BBT cho ta $f(t)\leq f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

Kết luận: $MaxP=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{13};\dfrac{3}{13};\dfrac{4}{13}\right)$

Câu 43: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a\geq b\geq c$ và $a^2+b^2+c^2=5$.

Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)\geq -4$

Trường THPT- Đoàn Thị Điểm – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\Rightarrow abc\leq 1$.

Suy ra: $1+a^2(b+c)\geq abc+a^2(b+c)=a(ab+bc+ca)=3a\Rightarrow\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}\leq\dfrac{1}{3a}$ (1).

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}\leq\dfrac{1}{3b}$ (2), $\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\dfrac{1}{3c}$ (3).

Cộng (1), (2) và (3) theo vế với vế ta có:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ca}{3abc}=\frac{1}{abc}\square.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $abc=1, ab+bc+ca=3\Rightarrow a=b=c=1, (a,b,c>0)$.

Câu 44: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x^2}{\sqrt{y^3+8}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{z^3+8}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{x^3+8}}+\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$

Trường THPT Đoàn Thượng – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)=9 \Rightarrow x+y+z\ge 3$

Mặt khác $(x+y+z+1)^2 \le 4(x^2+y^2+z^2+1) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2+1} \ge \frac{1}{2}(x+y+z+1)\ge 2$

Đẳng thức xảy ra $x=y=z=1$

$$0<\sqrt{y^3+8}=\sqrt{(y+2)(y^2-2y+4)}\le \frac{(y+2)+(y^2-2y+4)}{2}=\frac{y^2-y+6}{2}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{y^3+8}} \ge \dfrac{2x^2}{y^2-y+6}$. Tương tự cộng lại ta được

$$\frac{x^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{z^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{x^3+8}} \ge 2\left(\frac{x^2}{y^2-y+6}+\frac{y^2}{z^2-z+6}+\frac{z^2}{x^2-x+6}\right)$$

Đẳng thức xảy ra $x=y=z=1$

Ta lại có $\dfrac{x^2}{y^2-y+6}+\dfrac{y^2}{z^2-z+6}+\dfrac{z^2}{x^2-x+6} \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{y^2-y+6+z^2-z+6+x^2-x+6}$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+12}$$

Đặt $t=x+y+z, t\ge 3$ và xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2-t+12}, t\ge 3$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2+24t}{(t^2-t+12)^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0, t=24$

t	3		24		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{48}{47}$	$\searrow$	1

$\Rightarrow \min\limits_{[3;+\infty)} f(t)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow S\ge 3,\ S=3 \Leftrightarrow x=y=z=1$. Vậy $\min S=3$

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}-\dfrac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$.

Trường THPT Đoàn Thượng – Hải Dương – Lần 2

Lời giải tham khảo

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}=\frac{ab}{\left(c^2+a^2\right)+\left(c^2+b^2\right)}+\frac{bc}{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)}$$

$$\le \frac{ab}{2\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+b^2\right)}}+\frac{bc}{2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}\le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{b^2}{c^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\le \frac{1}{4}\left(1+\frac{b^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ab}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{b}{2c}+\frac{b}{2a}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right).$$

- Xét bất đẳng thức : $x^3+y^3\ge \frac{1}{4}(x+y)^3$ *(phải chứng minh bđt này)*

Áp dụng : $\frac{a^3b^3+b^3c^3}{c^3a^3}\ge \frac{(ab+bc)^3}{4c^3a^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)^3 .\Rightarrow P\le \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{96}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)^3$.

Đặt $t=\frac{b}{c}+\frac{b}{a}$, khi đó $t>0$ và $P\le -\frac{1}{96}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{96}t^3+\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\frac{1}{32}t^2+\frac{1}{8}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2,$ vì $t>0$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{12}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\le \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $a=b=c=1$

Câu 46: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$

Trường THPT Đông Du - ĐăkLăk– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có

$x+y+z=1\Rightarrow x+y=1-z$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}=\frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}}=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$$

$$\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}=\frac{1-x}{\sqrt{yz+1-y-z}}=\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$$

$$\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}=\frac{1-y}{\sqrt{zx+1-x-z}}=\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

Khi đó

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$$

$$=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}+\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}+\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1-z}{(1-x)(1-y)}.\frac{1-x}{(1-y)(1-z)}.\frac{1-y}{(1-x)(1-z)}}=3$$

Vậy Min P = 3 khi x = y = z = $\frac{1}{3}$

Câu 47: Cho x,y,z là ba số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}\,.$$

Trường THPT Đông Du – Đăk-lăk– Lần 2

Lời giải tham khảo

+ Áp dụng BĐT AM-GM, ta có

$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}}\leq\frac{1-x+\frac{2}{3}}{2}=\frac{5-3x}{6}$$

+ Tương tự, ta thu được

$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}}+\sqrt{(1-y).\frac{2}{3}}+\sqrt{(1-z).\frac{2}{3}}\leq\frac{5-3x}{6}+\frac{5-3y}{6}+\frac{5-3z}{6}=2$$

+ Suy ra $P\leq\sqrt{6}$

+ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 48: Cho a,b,c là các số dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\dfrac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$

Trường THPT Đông Du – Đăk - Lăk – Lần 3

Lời giải tham khảo

Với a + b + c = 3 ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$

Theo BĐT Cô-Si: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\ge\dfrac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ b = c

Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{b+c}\right)$ và $\dfrac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}\right)$

Suy ra P$\le\dfrac{bc+ca}{2(a+b)}+\dfrac{ab+bc}{2(c+a)}+\dfrac{ab+ca}{2(b+c)}=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1. Vậy max P = $\dfrac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.

Câu 49: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y-1=\sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=(x+y)^2-\sqrt{9-x-y}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$.

Trường THPT Đồng Gia – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge2; y\ge-1; 0<x+y\le9;$

Ta có $0\le x+y-1=\sqrt{2}.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{y+1}\le\sqrt{3(x+y-1)}\Rightarrow(x+y-1)^2\le3(x+y-1)$

$\Rightarrow0\le x+y-1\le3\Leftrightarrow1\le x+y\le4.$

Đặt $t=x+y, t\in[1;4]$, ta có $S=t^2-\sqrt{9-t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$S'(t)=2t+\dfrac{1}{2\sqrt{9-t}}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}>0,\forall t\in[1;4]$. Vậy $S(t)$ đồng biến trên [1;4].

Suy ra

$S_{\max}=S(4)=4^2-\sqrt{9-4}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{33-2\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=4; y=0;$

$S_{\min}=S(1)=2-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2; y=-1.$

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn a+b+c=3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Trường THPT Đồng Xoài – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng Bất đẳng thức $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9\text{abc}>0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 3\sqrt{abc}$$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3,\forall a,b,c>0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\ge$$

$$1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+\text{abc}=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Khi đó $P\le\frac{2}{3\left(1+\sqrt{abc}\right)}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$ (1)

Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$. Vì $a,b,c>0$ nên $0<abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$

Xét hàm số $Q=\frac{2}{3(1+t^3)}+\frac{t^2}{1+t^2},\quad t\in(0;1]$

$$\Rightarrow Q'(t)=\frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2}\ge 0,\quad\forall t\in(0;1]$$

Do hàm số đồng biến trên $(0;1]$ nên $Q=Q(t)\le Q(1)=\frac{5}{6}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\le\frac{5}{6}$

Vậy $\max P=\frac{5}{6}$, đạt được khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

Câu 51: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+2b=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{5}{8(a-b)^2}$

Trường THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết và bất đẳng thức CôSi ta có:

$$a^2+2b=12 \Leftrightarrow a^2+4+2b=16 \Leftrightarrow 4a+2b\le 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{4a.2b}\le 16 \Leftrightarrow 0<ab\le 8$$

Do đó $P\ge \frac{a^2b^2}{64}\left(\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}\right)+\frac{ab}{8}.\frac{5}{8(a-b)^2}=\frac{1}{16}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ (t>2)$, ta có $P\ge \frac{1}{16}t^2+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}-\frac{1}{8}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{16}t^2+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}-\frac{1}{8}$ *trên* $(2;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{8}t-\frac{5}{64}.\frac{1}{(t-2)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

BBT:

t	2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{64}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{27}{64}$

Suy ra $P\ge \frac{27}{64}$, dấu bằng xảy ra khi $a=2, b=4$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{27}{64}$ khi $a=2, b=4$.

Câu 52: Cho a,b,c là những số dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge \frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}$

Trường GDTX Cam Lâm – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\ (x>0, y>0)$

Ta có: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c}$; $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{a+b+2c}$; $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{2a+b+c}$

Ta lại có:

$$\frac{1}{2a+b+c}\geq\frac{2}{2a^2+b^2+c^2+4}=\frac{2}{a^2+7}\Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2+4-4a-2b-2c\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$$

Tương tự: $\frac{1}{2b+c+a}\geq\frac{2}{b^2+7}$; $\frac{1}{2c+a+b}\geq\frac{2}{c^2+7}$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Câu 53: Cho các số *x, y, z* là những số thực dương thỏa mãn: $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+x}$

Trường GDTX Cam Lâm _ Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si, ta có:

$$\frac{x^2}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}\geq x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{\sqrt{xy}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{x+y}\geq x-\frac{\sqrt{xy}}{2}\quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{y^2}{y+z}\geq y-\frac{\sqrt{yz}}{2}$ (2) Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=z$

$\frac{z^2}{x+z}\geq z-\frac{\sqrt{xz}}{2}$ (3) Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=z$

Từ (1); (2); (3) suy ra $A\geq x+y+z-\frac{1}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Chỉ ra được: $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\Rightarrow x+y+z\geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Khi đó: $A\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy $A_{\min}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Câu 54: Cho *a, b, c* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq 4$

:Trường GDTX Nha Trang – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có: $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$

mà $a^3+ab^2\geq 2a^2b$

$b^3+bc^2\geq 2b^2c$

$c^3+ca^2\geq 2c^2a$

Suy ra $3(a^2+b^2+c^2)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)>0$

Suy ra $VT\geq a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow VT\geq a^2+b^2+c^2+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$, ta chứng minh được $t\geq 3$.

Suy ra: $VT\geq t+\dfrac{9-t}{2t}=\dfrac{t}{2}+\dfrac{9}{2t}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\geq 3+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=4\Rightarrow VT\geq 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 55: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4a^3+3b^3+2c^3-3b^2c}{(a+b+c)^3}$$

Trường GDTX Nha Trang – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

+ Theo bđt Cô-si: $3b^2c\leq 2b^3+c^3$ (*). Dấu = xảy ra khi b=c

Ta sẽ cm : $b^3+c^3\ge\dfrac{(b+c)^3}{4}$ (**); $\forall b,c>0$. Thật vậy :

(**) $\Leftrightarrow 4(b^3+c^3)\ge b^3+c^3+3b^2c+3bc^2\Leftrightarrow b^3+c^3-b^2c-bc^2\ge 0\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2\ge 0$

Điều này đúng $\forall b,c>0$; dấu = xảy ra khi b=c

+ Áp dụng(*), (**) ta được $P\ge\dfrac{4a^3+\dfrac{(b+c)^3}{4}}{(a+b+c)^3}=4t^2+\dfrac{1}{4}(1-t)^3$; với $t=\dfrac{a}{a+b+c}$ và $t\in(0;1)$

+ Xét $f(t)=4t^3+\dfrac{1}{4}(1-t)^3; t\in(0;1)$. Ta có $f'(t)=12t^2-\dfrac{3}{4}(1-t)^2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{5}$

BBT

t	0		1/5		1
f'(t)		-		+	
f(t)		giảm	4/25	tăng	

Suy ra $P\ge\dfrac{4}{25}$; Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} b=c \\ \dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 2a=b=c$

Câu 56: Xét các số thực x, y thỏa mãn điều kiện : $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : P = x + y.

Trường THPT Hoàng Hoa Thám – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử T là tập giá trị của P, khi đó ta đi tìm m để hệ $\begin{cases} 3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}\right)=m \\ x+y=m\end{cases}$ (I)

có nghiệm.

Đặt $u=\sqrt{x+1}\ge 0, v=\sqrt{y+2}\ge 0$, ta có : $\begin{cases} 3(u+v)=m \\ u^2+v^2=m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u+v=\dfrac{m}{3} \\ u.v=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{9}-m-3\right)\end{cases}$ (II)

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm (u; v) với $u\ge 0, v\ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{3} \ge 0 \\ \dfrac{m^2}{3} - m - 3 \ge 0 \\ \left(\dfrac{m}{3}\right)^2 \ge 2\left(\dfrac{m^2}{9} - m - 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \le m \le 9 + 3\sqrt{15}$$

Vậy tập giá trị T của P là đoạn $\left[\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}; 9+3\sqrt{15}\right]$, suy ra minP và maxP

Câu 57: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{7}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Trường THPT Yên Mỹ - Hưng yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \dfrac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Do đó $A = \dfrac{7}{a^2+b^2+c^2} - \dfrac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$.

Vì $a,b,c > 0$ và $a+b+c=1$ nên $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 < a+b+c = 1$

Mặt khác $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \overset{B.C.S}{\le} 3(a^2+b^2+c^2)$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7}{t} + \dfrac{121}{7(1-t)}$; $t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$

$f'(t) = -\dfrac{7}{t^2} + \dfrac{121}{7(1-t)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{18}$

BBT

t	$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{18}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	↘		$\frac{324}{7}$		↗

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi $a;b;c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Câu 58: Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Trường THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử a ≤ b ≤ c, khi đó:

Đặt S = a + b + c + 1 => b + c +1 = S – a ≥ S – c

a + c + 1 ≥ S – c;

a + b + 1 ≥ S - c .

Ta có (1 – a)(1 – b) (1 +a +b) ≤ 1 (*)

<=> (1 –a – b + ab) (1 +a +b) – 1 ≤ 0

<=> - a^2 – b^2 – ab + a^2b + ab^2 ≤ 0

<=> b(a + b)(a – 1) – a^2 ≤ 0 đúng do a, b ∈[0; 1]. Vậy (*) đúng.

Mà (*) <=> (1 – a)(1 – b) (S - c) ≤ 1

<=> (1 – a)(1 – b) ≤ $\frac{1}{S-c}$ <=> $(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-c}{S-c}$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$\le \frac{a}{S-c}+\frac{b}{S-c}+\frac{c}{S-c}+\frac{1-c}{S-c}\le \frac{S-c}{S-c}=1$$

đpcm.

Câu 59: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+2b>c$ và $a^2+b^2+c^2-2=ab+bc+ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}-\frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

$2+ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc$

$\Rightarrow 2(ab+ac+1)\ge a^2+ab+bc+ca \quad \Rightarrow 2(ab+ac+1)\ge (a+b)(a+c)$

$\Rightarrow ab+ac+1\ge \frac{(a+b)(a+c)}{2} \quad \Rightarrow a(b+c)+a+b+1\ge \frac{(a+b)(a+c)}{2}+(a+b)$

$\Rightarrow a(b+c)+a+b+1\ge \frac{(a+b)(a+c+2)}{2}\Rightarrow \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}\le \frac{2}{a+b}$

$(a+c)(a+2b-c)\le \frac{1}{4}(a+c+a+2b-c)^2=(a+b)^2$

$\Rightarrow \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}\ge \frac{a+b+1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}$

Khi đó $P\le \frac{2}{a+b}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{(a+b)^2};t=\frac{1}{a+b}>0$

Xét hàm số $f(t)=t-t^2;t>0,f'(t)=1-2t,f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: $MaxP=\frac{1}{4},khi\ a=\frac{2+\sqrt{2}}{2},b=c=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Câu 60: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y$.

Trường THPT Kẻ Sặt – Hải Dương– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{x}{z}+xz \geq 2x$, $\frac{z}{y}+yz \geq 2z$.

Từ đó suy ra $P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y \geq 2x-xz+2z-yz+3y$

$$=2(x+z)+y(x+y+z)-xz-yz=2(x+z)+y^2+x(y-z)$$

Do $x>0$ và $y \geq z$ nên $x(y-z) \geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$$P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y \geq 2(x+z)+y^2=2(3-y)+y^2=(y-1)^2+5 \geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x=y=z=1$

Câu 61: Cho các số thực dương x, y sao cho $x+y<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{1-x-y}$.

Trường THPT Khánh Sơn – Khánh Hoà– Lần 2

Lời giải tham khảo

$$P=\frac{a+b+c}{a}+4.\frac{a+b+c}{b}+9.\frac{a+b+c}{c}$$
$$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{b}+4+\frac{4c}{b}+\frac{9a}{c}+\frac{9b}{c}+9$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{9a}{c}\right)+\left(\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c}\right)+14 \quad (1)$$

Đặt $1-x-y=z \Rightarrow x+y+z=1$

Vì $x+y+z=1$. Ta đặt

$$x=\frac{a}{a+b+c}, \quad y=\frac{b}{a+b+c}, \quad z=\frac{c}{a+b+c} \quad (a,b,c>0)$$

Áp dụng bất đẳng thức cô- si, ta có

$$\frac{b}{a}+\frac{4a}{b} \geq 4 \quad (2)$$

$$\frac{c}{a}+\frac{9a}{c}\ge 6 \qquad (3)$$

$$\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c}\ge 12 \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $P\ge 36$.

Dấu "=" xảy ra $x=\frac{1}{6}\vee y=\frac{1}{3}$

Vậy $\min P=36$.

Câu 62: Cho các số thực dương a, b, c.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{3a^4+3b^4+25c^3+2}{(a+b+c)^3}$

Trường THPT Khoái Châu – Hưng Yên– Lần 2

Lời giải tham khảo

- Áp dụng BĐT Cô - Si ta có: $2a^4+\left(a^4+1\right)\ge 2a^4+2a^2\ge 4a^3$ hay $3a^4+1\ge 4a^3$.

- Tương tự $3b^4+1\ge 4b^3 \Rightarrow M\ge \frac{4a^3+4b^3+25c^3}{(a+b+c)^3}$

Mà $(a-b)^2(a+b)\ge 0\Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)\ge (a+b)^3$

$$\Rightarrow M\ge \frac{(a+b)^3+25c^3}{(a+b+c)^3}=\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3+25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3=\left(1-\frac{c}{a+b+c}\right)^3+25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$$

Đặt $t=\frac{c}{a+b+c}\quad (0<t<1)$

Xét hàm số $f(t)=(1-t)^3+25t^3\ (0<t<1)$

có: $f'(t)=-3\left[(1-t)^2-(5t)^2\right]$, $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{6} \\ t=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{6}$		1	$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$		
$f(t)$			$\searrow$	$\frac{25}{36}$	$\nearrow$		

Vậy $Min\, f(t) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$ khi $t = \frac{1}{6}$ hay $Min\, M = \frac{25}{36}$ $a = b = 1, c = \frac{2}{5}$.

Câu 63: Cho hai số dương x, y phân biệt thỏa mãn: $x^2 + 2y = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$.

Trường THPT Kinh Môn – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện, dùng bất đẳng thức Côsi suy ra: $0 < xy \le 8$.

Đánh giá $P \ge \frac{1}{16}.\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} (t > 2)$. Khi đó $P \ge \frac{1}{16}.(t^2 - 2) + \frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}$ Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{16}.t^2 + \frac{5}{64}.\frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}$ (với t > 2) Tính đạo hàm, vẽ bảng biến thiên, tìm được:

$\min\limits_{(2;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{64}$ Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{64}$ khi x = 2 và y = 4

Câu 64: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $4\ x^3 + 8y^6\ = 1$.

Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{{x + 2y^2 + 2}^{\ 3}}{5\ x^2 + y^2\ - 5\ x + y\ + 3}$

Trường THPT Lạc Long Quân – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

$\forall a, b > 0$ ta có $4\ a^3 + b^3\ \ge\ a + b^{\ 3}$ (1)

Thật vậy:

$(1) \Leftrightarrow 4\ a^3 + b^3\ \ge a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Leftrightarrow 3\ a^3 + b^3\ \ge 3ab(a+b)$

$\Leftrightarrow\ a + b\ \ a^2 - ab + b^2\ \ge ab(a+b) \Leftrightarrow\ a + b\ \ a^2 - 2ab + b^2\ \ge 0$

$\Leftrightarrow\ a + b\ \ a - b^{\ 2} \ge 0$ (2)

Vì a,b>0 nên (2) luôn đúng . Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Suy ra (1) được chứng minh.

Áp dụng bđt (1) với $a = x$, $b = 2y^2$, ta có :

$$1 = 4\left(x^3 + 8y^6\right) = 4\left[x^3 + \left(2y^2\right)^3\right] \geq \left(x + 2y^2\right)^3 \Rightarrow x + 2y^2 \leq 1$$

Lại có :

$$5\left(x^2 + y^2\right) - 5\left(x + y\right) + 3 = 5x^2 - 5x + 5y^2 - 5y + 3$$

$$= 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 5\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{10}{4} + 3 = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Do đó : $P = \dfrac{\left(x + 2y^2 + 2\right)^3}{5\left(x^2 + y^2\right) - 5\left(x + y\right) + 3} \leq \dfrac{\left(1 + 2\right)^3}{\frac{1}{2}} = 54$

Ta có P = 54 khi $\begin{cases} 4\left(x^3 + 8y^6\right) = 1 \\ x = 2y^2 \\ x = y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$

Vậy Giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{max} = 54$,đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{2}$

Câu 65: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = xyz$.

Chứng minh rằng : $\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + xz} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Trường THPT Lạc Long Quân – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ => $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1$$

Thật vậy,

$\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge$
$\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$

$\Rightarrow \sqrt{a+bc}\ge\sqrt{(a+\sqrt{bc})^2}=a+\sqrt{bc}$

Tương tự, $\sqrt{b+ac}\ge b+\sqrt{ac}$,

$\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+a+b+c$$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1$ =>đpcm

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3$

Câu 66: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{a+c-b}+\frac{5}{a+b-c}$

Trường THPT Lam Kinh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}, x>0, y>0.$

$$S=\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$$

suy ra $S\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}.$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a$, nên $\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}=2\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\right)=2\left(a+\frac{3}{a}\right)\ge4\sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 67: Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)$

Trường THPT Lê Lợi – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $f(x)=2x^3-yx^2-z^2x+2(y^3+z^3)-y^2z$ .Ta có:

$f'(x)=6x^2-2yx-z^2;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1=\frac{1}{6}(y-\sqrt{y^2+6z^2});x=x_2=\frac{1}{6}(y+\sqrt{y^2+6z^2})$ Nhận xét: $x_1\notin(0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2\in(0;1)$ hay $x_2\notin(0;1)$ thì $\underset{x\in[0;1]}{Max} f(x)=Max\{f(0);f(1)\}$.

Mà $f(0)=2(y^3+z^3)-y^2z\le 2(y^3+z^3)-y^2z+(2-y-z^2)=f(1)$

$\Rightarrow\ f(x)\le f(1)=2y^3-zy^2-y+2z^3-z^2+2 \qquad (1)$

Lại đặt $g(y)=2y^3-zy^2-y+2z^3-z^2+2$,

$g'(y)=6y^2-2zy-1;\ g'(y)=0\Leftrightarrow y=y_1=\frac{1}{6}(z-\sqrt{z^2+6});y=y_2=\frac{1}{6}(z+\sqrt{z^2+6})$

Nhận xét tương tự suy ra $\underset{y\in[0;1]}{Max} g(y)=Max\{g(0);g(1)\}$.

Lại có $g(0)=2z^3+2-z^2\le 2z^3+2-z^2+(1-z)=g(1)$. Suy ra

$g(y)\le g(1)=2z^3+2-z^2+(1-z)=2z^3-z^2-z+3 \qquad (2)$

Cuối cùng đặt $h(z)=2z^3-z^2-z+3$ với $z\in[0;1]$, $h'(z)=6z^2-2z-1$.

$h'(z)=0\Leftrightarrow z_1=\frac{1-\sqrt{7}}{6};z_2=\frac{1+\sqrt{7}}{6}$. Lập bảng biến thiên suy ra: $\underset{z\in[0;1]}{Max} h(z)=h(1)=3 \quad (3)$

Dấu bằng xảy ra ở (1), (2), (3) khi x = y = z = 1.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi x = y = z = 1.

Câu 68: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x>2,y>1,z>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}}-\frac{1}{y(x-1)(z+1)}$.

Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a=x-2,b=y-1,c=z\Rightarrow a,b,c>0$. Khi đó :

$P=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$. Ta có :

$a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+1)^2}{2}\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Mặt khác

$(a+1)(b+1)(c+1) \le \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$. Khi đó :

$P \le \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Đặt $t=a+b+c+1 \Rightarrow t>1$. Khi đó $P \le \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3} = f(t), t>1$. Ta có :

$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4}, t>1$;

$f'(t)=0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81t^2 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 9t (t>1)$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 (t>1)$

Lập bảng biến thiên hàm f trên khoảng $(1;+\infty)$. Ta có f có giá trị lớn nhất bằng $f(4)=\frac{1}{8}$.

$$\text{Vậy } \max P = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Câu 69: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+y)(y+z)(z+x)-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}$

Trường THPT Lương Thế Vinh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT Cosi: $x^3+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x} \ge 4x$ hay $x^3+3\sqrt[3]{x} \ge 4x$

Tương tự: $y^3+3\sqrt[3]{y} \ge 4y$; $z^3+3\sqrt[3]{z} \ge 4z$

Cộng từng vế BĐT ta được $x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right) \ge 4(x+y+z)=12$, (1)

Ta có: $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$

Thay vào (1) ta được: $27-3(x+y)(y+z)(z+x)+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right) \ge 12$

Suy ra: $P \le 5$. Đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z=1$

Câu 70: Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{7x+y+4\sqrt{xy}+18.\sqrt[3]{xyz}}+\frac{1}{2}(x+y+z)^2+2$$

Trường THPT Lương Tài 2 – Bắc Ninh – Lần 3

Lời giải tham khảo

Ta có: $4\sqrt{xy} = 2\sqrt{x.4y} \le x + 4y$; $18\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{x.4y.9z} \le x + 4y + 9z$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 4y = 9z$

Suy ra $P \ge \dfrac{1}{x+y+z} + \dfrac{1}{2}(x+y+z)^2 + 2$

Đặt $t = x + y + z, (t > 0)$, xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} + 2 \ (t > 0)$

Lập bảng biến thiên tìm được $\min f(t) = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $\min P = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{36}{49}; y = \dfrac{9}{49}; z = \dfrac{4}{49}$

Câu 71: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x + y + z \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8 + x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8 + y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8 + z^3}}.$$

Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có BĐT: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $a, b, c, x, y, z > 0$ và chứng minh.

(Học sinh không chứng minh (*) trừ 0.25)

Áp dụng (*) ta có: $P \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{xy + yz + zx + \sqrt{8+x^3} + \sqrt{8+y^3} + \sqrt{8+z^3}}$

Ta có: $\sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \le \dfrac{2+x+4-2x+x^2}{2} = \dfrac{6-x+x^2}{2}$

$$\sqrt{8+y^3} = \sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)} \le \frac{2+y+4-2y+y^2}{2} = \frac{6-y+y^2}{2}$$

$$\sqrt{8+z^3} = \sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)} \le \frac{2+z+4-2z+z^2}{2} = \frac{6-z+z^2}{2}$$

Suy ra: $P \ge \dfrac{2(x+y+z)^2}{2xy + 2yz + 2zx + 18 - (x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2}$

$$= \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 18}$$

Đặt $t = x + y + z$ $(t \geq 3)$. Khi đó: $P \geq \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ Xét hàm số: $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ với $t \geq 3$.

$$f'(t) = \frac{2(-t^2 + 36t)}{(t^2 - t + 18)} \text{ Ta có:, } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 36$$

BBT:

x	3		36		+∞
y'		+	0	−	
y			144/71		
	3/4	↗		↘	2

Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $t = 3$.

Vậy GTNN của P là: 3/4 khi $x = y = z = 1$.

Câu 72: Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2(a+b+c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Trường THPT Lý Thường Kiệt – Bình Thuận – Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $f(x) = 2x - \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}; x \in (-\sqrt{3}; 0)$

$f(x) = -x - \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{3}{2}(x+1)^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2}; \forall x \in (-\sqrt{3}; 0)$

Nên $2a - \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2} - \frac{3a^2}{2}$; $2b - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2} - \frac{3b^2}{2}$; $2c - \frac{1}{c} \geq \frac{1}{2} - \frac{3c^2}{2}$

$\Rightarrow A = 2(a+b+c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq -3$

Vậy: $\min A = -3$ khi $a = b = c = -1$

Câu 73: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\dfrac{2}{3x+2y+z+1}+\dfrac{2}{3x+2z+y+1}=(x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}$.

Trường THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có: $(x+y)(x+z)\le\dfrac{(x+y+x+z)^2}{4}=\dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1}+\frac{1}{3x+2z+y+1}\right)\ge\frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{8}{3(2x+y+z)+2}\le\dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt: $2x+y+z=t\ (t>0)\Rightarrow\dfrac{8}{3t+2}\le\dfrac{t^2}{4}\Leftrightarrow(t-2)(3t^2+8t+16)\ge0$

$$\Leftrightarrow t\ge2\Rightarrow 2x+y+z\ge2$$

Mà: $4\le(2x+y+z)^2\le(2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $P=\dfrac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2}=1+\dfrac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}\le1+\dfrac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}}=1+\dfrac{36x+6}{3x^2+2}$

Xét hàm số: $f(x)=1+\dfrac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x>0$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(loại)}\\ x=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right)=10\end{array}\right.$

Lập BBT Suy ra: $f(x)\le10\Rightarrow P\le10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x=\dfrac{2}{3},y=z=\dfrac{1}{3}$.

Câu 74: Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa $21ab+2bc+8ca\le12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$.

Trường THPT Marie Curie - Hà Nội– Lần 1

Lời giải tham khảo

• Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c} \Rightarrow x,\ y,\ z>0,\ 2x+8y+21z\le 12xyz$ và $S=x+2y+3z$.

• $2x+8y+21z\le 12xyz \Rightarrow z(12xy-21)\ge 2x+8y \Rightarrow \begin{cases} z\ge \dfrac{2x+8y}{12xy-21} \\ 12xy-21>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z\ge \dfrac{2x+8y}{12xy-21} \\ x>\dfrac{7}{4y} \end{cases}$

• Ta có: $S\ge x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$.

• Xét hàm số $f(x)=x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$ trên $\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$

$$f'(x)=1-\frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}\in\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$$

• Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$ ta có:

$$S\ge f(x)\ge f\left(\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}\right)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$$

• Xét hàm số $g(y)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$ trên $(0;+\infty)$

$$g'(y)=\frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{4}\in(0;+\infty)$$

• Lập bảng biến thiên cho hàm số $z=g(y)$ ta có: $S\ge g(y)\ge g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}$

• Vậy $\min S=\frac{15}{2}$ khi $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{3}{2}$.

Câu 75: Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y=26\sqrt{x-3}+3\sqrt{y-2013}+2016$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(x-1)^2+(y-1)^2+\frac{2016+2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.

Trường THPT Minh Châu – Hưng Yên – Lần 3

Lời giải tham khảo

$$M = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 2 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}} = (x+y+1)^2 - 4(x+y+1) + 5 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}}$$

Đặt $t = \sqrt{x+y+1}$ thì ta được $M = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}$

Điều kiện của t:

Đặt $a = \sqrt{x-3}; b = \sqrt{y-2013}$ ta được $x = a^2 + 3; y = b^2 + 2013$ và

$$a^2 + 3 + b^2 + 2013 = 26a + 3b + 2016 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 26a + 3b \le \sqrt{(26^2 + 3^2)(a^2 + b^2)}$$

Hay $0 \le a^2 + b^2 \le \sqrt{685}$

Từ đó ta được $x + y + 1 = a^2 + b^2 + 2017 \in [2017; 2072]$ nên $t \in D = \left[\sqrt{2017}; \sqrt{2072}\right]$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}; t \in D$

$$f'(t) = 4t^3 - 8t - \frac{2016}{t^2} = \frac{4t^5 - 8t^4 - 2016}{t^2} = \frac{4t^4(t-2) - 2016}{t^2} > 0 \forall t \in \left[\sqrt{2017}; \sqrt{2072}\right]$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên D

$\max M = f\left(\sqrt{2072}\right) = 4284901 + \frac{36}{37}$ khi $t = \sqrt{2072}$ ta được $\begin{cases} a^2 + b^2 = 685 \\ \frac{a}{26} = \frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26 \\ b = 3 \end{cases}$ hay

$x = 679; y = 2022$

$\min M = f\left(\sqrt{2017}\right) = 4060226 + \frac{2016}{2017}$ khi $t = \sqrt{2017}$ hay $x = 3; y = 2013$

Câu 76: Cho ba số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn: $xyz = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1}$

Trường THPT Nam Duyên Hà – Thái Bình– Lần 1

Lời giải tham khảo

Trong mp(Oxy), gọi $\vec{a} = (\log_3 x; 1), \vec{b} = (\log_3 y; 1), \vec{c} = (\log_3 z; 1)$

và $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{n} = (1; 3)$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \ge |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \Rightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1} \ge \sqrt{1^2 + 3^2}$

$\Rightarrow P \ge \sqrt{10}$, dấu = xảy ra khi ba vecto $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ cùng hướng và kết hợp điều kiện để bài ta được $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Vậy $\min P = \sqrt{10}$ khi $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Câu 77: Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x \le y \le z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6}.$$

Trường THPT Thanh Chương 3 – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Vì $0 < x \le y \le z$

nên

$$x(x-y)(y-z) \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-xy)(y-z) \ge 0 \Leftrightarrow x^2y - x^2z - xy^2 + xyz \ge 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \ge x^2z + xy^2$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz = \left(x^2z + xy^2\right) + yz^2 - xyz \le \left(x^2y + xyz\right) + yz^2 - xyz = y\left(x^2+z^2\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y\left(x^2+z^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2y^2(x^2+z^2)(x^2+z^2)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2y^2+(x^2+z^2)+(x^2+z^2)}{3}\right)^3} = 2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}$$

Do đó

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{6} \le 2\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$$

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)}$ $(t > 0)$. Ta có $P \le f(t) = 2t^3 - \frac{3}{2}t^4$.

$f'(t) = 6t^2 - 6t^3 = 6t^2(1-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ suy ra được $f(t) \le f(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \le \frac{1}{2}$.

Ta thấy $P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $Max\ P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Câu 78: Cho x, y, z > 0 . Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{3x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{5z}{x+y}$.

Trường Cao Đẳng Nghề Nha Trang – Lần 2

Lời giải tham khảo

$$P = \left(\frac{3x}{y+z} + 3\right) + \left(\frac{4y}{z+x} + 4\right) + \left(\frac{5z}{x+y} + 5\right) - 12$$

$$= (x+y+z)\left(\frac{3}{y+z} + \frac{4}{z+x} + \frac{5}{x+y}\right) - 12$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x+y}\right)^2 + \left(\sqrt{y+x}\right)^2 + \left(\sqrt{z+x}\right)^2\right)\left[\left(\sqrt{\frac{3}{y+z}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{z+x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{x+y}}\right)^2\right] - 12$$

$$\geq \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})^2 - 12$$

$$\text{MinP} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12 \Leftrightarrow \frac{y+z}{\sqrt{3}} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y}{\sqrt{5}}$$

Câu 79: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 8\left(\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} + \frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz}\right) - \frac{3}{2}(x+y)^2$

Trường Trung cấp Nghề Ninh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho y; z và x, z:

$$\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} \geq \frac{x^2}{(y+z)^2 + \frac{5}{4}(y+z)^2} = \frac{4}{9}.\frac{x^2}{(y+z)^2}$$

$$\frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz} \geq \frac{y^2}{(x+z)^2 + \frac{5}{4}(x+z)^2} = \frac{4}{9}.\frac{y^2}{(x+z)^2}$$

Dấu “ = “ khi y = z = x. Khi đó :

$$\frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} + \frac{y^2}{(x+z)^2 + 5xz} \geq \frac{4}{9}.\left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(x+z)^2}\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$\frac{2}{9}.\left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(x+z)^2}\right](1^2 + 1^2) \geq \frac{2}{9}\left[\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z}\right]^2$$

Mà

$$\frac{2}{9}\left[\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\right]^2=\frac{2}{9}\left[\frac{(x^2+y^2)+z(x+y)}{xy+z(x+y)+z^2}\right]^2$$

$$\geq \frac{2}{9}\left[\frac{\dfrac{(x+y)^2}{2}+z(x+y)}{\dfrac{(x+y)^2}{4}+z(x+y)+z^2}\right]^2=\frac{2}{9}\left[\frac{2(x+y)^2+4z(x+y)}{(x+y)^2+4z(x+y)+4z^2}\right]^2$$

Do x + y + z =2 $\Rightarrow$ x + y =2 – z nên

$$M\geq \frac{16}{9}\left[\frac{2(2-z)^2+4z(2-z)}{(2-z)^2+4z(2-z)+4z^2}\right]^2-\frac{3}{2}(2-z)^2$$

$$\Leftrightarrow M\geq \frac{64}{9}\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^2-\frac{3}{2}(z-2)^2$$

Do $\begin{cases} x;y;z>0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow z\in(0;2)$. Xét hàm số: $F(z)=\frac{64}{9}\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^2-\frac{3}{2}(z-2)^2$ trên (0;2) có:

$$F'(z)=\frac{128}{9}\left(\frac{z-2}{z+2}\right)\frac{4}{(z+2)^2}-3(z-2)$$

$$=(z-2)\left[\frac{512}{9}.\frac{1}{(z+2)^3}-3\right]=\frac{(z-2)}{9(z+2)^3}\left[512-27(z+2)^3\right]$$

Trên (0;2), $F'(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{2}{3}$. Ta lập bảng biến thiên:

z	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
F′(z)		-	0	+	
F(z)		↘	-8/9	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $M\geq F(z)\geq \frac{-8}{9}$. Dấu " = " xảy ra khi x = y = z = $\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là min M = $\frac{-8}{9}$ khi x = y = z = $\frac{2}{3}$

Câu 80: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{2z}{x+y}$

Trường Trung Cấp Nghề Ninh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ suy ra 2xy = (x + y)z $\Leftrightarrow \frac{2xy}{z^2}=\frac{x+y}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho x, y ta lại có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geq\frac{4(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{z}\geq\frac{4}{(x+y)}$$

Dấu " = " xảy ra khi x = y . Suy ra $\frac{x+y}{z}\geq 2$ (*)

Khi đó $P=\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{2z}{x+y}=\left[\frac{x+y}{z}\right]^2-\frac{2xy}{z^2}+\frac{2z}{x+y}$

$=\left[\frac{x+y}{z}\right]^2-\frac{x+y}{z}+\frac{2z}{x+y}$

Đặt t = $\frac{x+y}{z}$, từ (*) ta có t ≥ 2

Xét hàm số f(t) = $t^2-t+\frac{2}{t}$, t ≥ 2

Ta có : f'(t) = $\frac{2t^3-t^2-2}{t^2}$ >0, $\forall$ t ≥ 2

Suy ra f(t) đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ nên f(t) $\geq$ f(2) = 3, $\forall$ t ≥ 2

Dấu " = " xảy ra khi t = 2 $\Leftrightarrow x+y=2z$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là min P = 3 khi x = y = z

Câu 81: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2 \le \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$

Trường THPT Ngô Sỹ Liên – Bắc Giang – Lần 2

Lời giải tham khảo

▪ Ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$, đặt $t = \sqrt[3]{xyz} > 0$

Mà $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < t \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P \ge 8t^3 + \frac{3}{t^2}$. Xét hàm số $f(t) = 8t^3 + \frac{3}{t^2}$

Ta có $\forall t \ne 0$, $f'(t) = 24t^2 - \frac{6}{t^3}$, $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$

▪ Lập bảng xét dấu ta có: $f(t) \ge 13$ với mọi giá trị t thỏa mãn $0 < t \le \frac{1}{2}$

Suy ra $P \ge 13$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$ hay $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Kết luận.

Câu 82: Cho x > 0, y > 0 thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm GTNN của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}$.

Trường THPT Nguyễn Trí Thanh – Lần 1

Lời giải tham khảo

+ Ta có

$x^2y + xy^2 = x + y + 3xy \Leftrightarrow xy(x+y) = x + y + 3xy$ (1)

do x >0 ; y > 0 nên x + y > 0

(1) $\Rightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \ge \frac{4}{x+y} + 3 \Rightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 4 \ge 0$

$\Rightarrow [(x+y)+1][(x+y)-4] \ge 0 \Rightarrow x + y \ge 4$

(1) $\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{3}{x+y} \quad \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+y} = \frac{1}{xy}$

Nên P = $(x + y)^2 + 2 - \frac{1}{xy} = (x+y)^2 + 1 + \frac{3}{x+y}$

+ Đặt x + y = t (t ≥ 4) $\Rightarrow P = t^2 + \frac{3}{t} + 1 = f(t)$

+Ta có $f'(t) = 2t - \frac{3}{t^3} = \frac{2t^3 - 3}{t^2} > 0 \forall t > 4$. Nên f(t) đồng biến trên nửa khoảng $[4;+\infty)$ =>

$P = f(t) \geq f(4) = \frac{71}{4}$

Hay giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$ khi x= y = 2

Câu 83: Cho ba số thực dương x, y, z thuộc đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{z}{8(x^2+y^2)} + \frac{x^2+y^2-1}{xyz}$.

Trường THPT Hàn Thuyên – Bắc Ninh – Lần 2

Lời giải tham khảo

$\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2, (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq 5 - z \Rightarrow -\frac{1}{xyz} \geq \frac{-1}{(5-z)z}$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \leq z^2 - 10z + 26$

ĐS : $T = \frac{1}{2}, x = y = 1; z = 4$

Câu 84: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}$.

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu - Lần 2

Lời giải tham khảo

♥ Biến đổi biểu thức P, ta có: $P = \frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}{y + \frac{1}{z}} + \frac{\left(y + \frac{1}{z}\right)^2}{z + \frac{1}{x}} + \frac{\left(z + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{y}}$

♥ Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \quad (a,b,c > 0) \qquad (1)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a,\frac{b^2}{c}+c\ge 2b,\frac{c^2}{a}+a\ge 2c\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.$$

Sử dụng (1) ta suy ra: $P\ge\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{x}\right)=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=Q$

♥ Tiếp tục đánh giá Q, ta có: $Q\ge 3\sqrt[3]{xyz}+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$, ta có: $0<t=\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}\le\frac{1}{2}$

♥ Khi đó: $Q\ge 3t+\frac{3}{t}=12t+\frac{3}{t}-9t\ge 2\sqrt{36}-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Câu 85: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $0\le a<b\le c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{a+b+c}{(a+b)c}+20(a+b+c)$.

Trường THPT Nguyễ Siêu – Hưng Yên– Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}+20(a+b+c)$

Vì $0\le a<b\le c$ nên $a^2+b^2\le ab+b^2\le(\frac{a}{2}+b)^2$ dấu bằng xảy ra khi a=0

Tương tự $a^2+c^2\le(\frac{a}{2}+c)^2$ dấu bằng xảy ra khi a=0

Do đó $P\ge\frac{1}{(\frac{a}{2}+b)^2}+\frac{1}{(\frac{a}{2}+c)^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}+20(a+b+c)$ dấu bằng xảy ra khi a=0

Áp dụng các bất đẳng thức sau:

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ Dấu bằng xảy ra khi x=y (phải chứng minh)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ Dấu bằng xảy ra khi x=y

Suy ra $P\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}+\frac{4}{a+b+c}+20(a+b+c)$

Đặt t=a+b+c với t>0

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t^2}+\frac{4}{t}+20t,\ \ t>0$

Ta có $f'(t)=-8\frac{2t}{t^4}-\frac{4}{t^2}+20=\frac{20t^3-4t-16}{t^3}$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 20t^3-4t-16=(t-1)(20t^2+20t+16)=0\Leftrightarrow t=1$$

Bảng biến thiên

T	0		1		+∞
f′(t)		-	0	+	
f(t)	+∞	↘	32	↗	+∞

Suy ra $P\ge 32$ dấu bằng đạt được khi $\begin{cases}a=0,\ b=c\\ a+b=c\\ t=a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=c=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 32.

Câu 86: Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện $4(xz+y)\ge y^2+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{8}\left(\sqrt{2x^2+2z^2}+y\right)^2+\frac{(y-z)(2x+4y)+2}{(x+y+z)^2}$

Trường THPT Nguyễn Trãi - KonTum – Lần 1

Lời giải tham khảo

* Ta có: $4(xz+y)\ge y^2+4\Rightarrow 4xz\ge(2-y)^2\Rightarrow 2\sqrt{xz}\ge|2-y|\ge 2-y$

$$\Rightarrow 2\le 2\sqrt{xz}+y\le x+y+z. \qquad (1)$$

* $P=\frac{1}{8}\left(\sqrt{2x^2+2z^2}+y\right)^2+\frac{(y-z)(2x+4y)+2}{(x+y+z)^2}+1-1$

$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{2x^2+2z^2}+y\right)^2+\frac{(x+2y)^2}{(x+y+z)^2}+\frac{(z-y)^2}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{(x+y+z)^2}-1$

Vì: $\sqrt{2x^2+2z^2}\ge x+z,\ \forall x,z\ge 0$ (dấu "=" xảy ra khi x = z)

nên: $\frac{1}{8}\left(\sqrt{2x^2+2z^2}+y\right)^2\ge\frac{1}{8}(x+y+z)^2=2\left(\frac{x+y+z}{4}\right)^2$

$$P\ge 2\left(\frac{x+y+z}{4}\right)^2+\frac{(x+2y)^2}{(x+y+z)^2}+\frac{(z-y)^2}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{(x+y+z)^2}-1 \qquad (2)$$

* Ta có: $(a-b)^2+(a-c)^2\ge 0\Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2\ge 2a(b+c),\ \forall a,b,c$ (3)

(Dấu "=" xảy ra khi a = b = c)

Áp dụng (3), từ (2) ta có :

$$P\ge 2.\frac{x+y+z}{4}.\frac{x+y+z}{x+y+z}+\frac{2}{(x+y+z)^2}-1=\frac{x+y+z}{2}+\frac{2}{(x+y+z)^2}-1$$

* Đặt $t=x+y+z,\ \ t\ge 2$ (từ (1))

Xét hàm số: $f(t)=\frac{1}{2}t+\frac{2}{t^2}-1,\quad t\ge 2$

Ta có : $f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{t^3}=\frac{t^3-8}{2t^3}\ge 0,\ \forall t\ge 2$

=> hàm số f(t) đồng biến trên $[2;+\infty)$ => minf(t) = f(2) = $\frac{1}{2}$

Vậy minP = 1/2, đạt được khi x = z = 1 và y = 0.

Câu 87: Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+x+y=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x}{y+1}+\frac{3y}{x+1}+\frac{xy}{x+y}-\left(x^2+y^2\right)$

Trường THPT – Nguyễn Viết Xuân – Phú Yên– Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $t=x+y\Rightarrow xy=3-t;\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2(3-t)=t^2+2t-6$

Ta có $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow 3-t\le\frac{1}{4}t^2\Leftrightarrow t\ge 2$

Suy ra $P=\dfrac{3\left(x^2+y^2\right)+3\left(x+y\right)}{xy+x+y+1}+\dfrac{xy}{x+y}-\left(x^2+y^2\right)=-t^2+t+\dfrac{12}{t}-\dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=-t^2+t+\dfrac{12}{t}-\dfrac{5}{2}$ với $t\geq 2$

Ta có $f'\left(t\right)=-2t+1-\dfrac{2}{t^2}<0,\ \forall t\geq 2$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến với $t\geq 2$

$\Rightarrow P\leq f\left(t\right)\leq f\left(2\right)=\dfrac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $x=y=1$.

Câu 88: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P=(x+y+z)^2-\dfrac{x^3+y^3+z^3}{9xyz}+\dfrac{3}{xy+yz+zx}$

Trường THPT Nguyễn Văn Trỗi – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) => x^2+y^2+z^2=3+2(xy+yz+zx)$

lại có : $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\right]+3xyz$

$=(x+y+z)\left[3-(xy+yz+zx)\right]+3xyz$ nên $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{9xyz}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\right)\left[3-(xy+yz+zx)\right]$

Mặt khác : $\begin{cases} xy+yz+xz\geq \sqrt[3]{x^2.y^2.z^2} \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2.y^2.z^2}} \end{cases} => \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\Rightarrow \dfrac{9}{xy+yz+xz}$

Suy ra : $P\leq 3+2(xy+yz+zx)-\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{xy+yz+xz}\right)\left[3-(xy+yz+zx)\right]+\dfrac{3}{xy+yz+xz}$

$=\dfrac{11}{3}+2(xy+yz+zx)\leq \dfrac{11}{3}+2\left(\dfrac{x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2}{2}\right)=\dfrac{29}{3}$

Vậy : $P_{max}=\dfrac{121}{60}$ đạt được khi : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ xy=yz=zx \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 89: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}}-\frac{4}{8+a+2b+3c}+\frac{1}{4+b+2c}.$$

Trường THPT Như Xuân – Thanh Hoá - Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $2\sqrt{2bc}\le b+2c\Rightarrow \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}}\ge\frac{1}{4a+4b+4c}$ và $\frac{-4}{8+a+2b+3c}\ge\frac{-1}{4+a+b+c}+\frac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P\ge\frac{1}{4(a+b+c)}+\frac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t=a+b+c,\ t>0$

xét $f(t)=\frac{1}{4t}+\frac{-1}{4+t},\quad t>0,\qquad f'(t)=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{(4+t)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=4.$

t	0		4		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘	$-\frac{1}{16}$	↗	

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases}b=2c\\a+b+c=b+2c\\a+b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c=1\\b=2\end{cases}.$

Câu 90: Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}+\frac{z^3}{z+xy}+\frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

Trường THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên – Lần 1

Lời giải tham khảo

▪ Từ giả thiết $x+y+z=1$ ta có: $(x+1)(y+1)=z+xy\le\frac{(x+y+2)^2}{4}=\frac{(z+1)^2}{4}$

Nên $P\ge\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}+\frac{4z^3+28}{(z+1)^2}$

▪ Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwartz ta có:

$$\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}=\frac{x^4}{x^2+xyz}+\frac{y^4}{y^2+xyz}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz}\ge\frac{x^2+y^2}{1+z}\ge\frac{(x+y)^2}{2(1+z)}=\frac{(z-1)^2}{2(1+z)}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{2(z+1)^2} = f(z).$$

Đặt $g(z) = 2f(z) \Rightarrow g'(z) = \dfrac{(3z-5)\left(3z^3 + \dfrac{51z^2}{3} + 37z + 23\right)}{(z+1)^4}$

▪ Lập bảng biến thiên ta có: $f(z) \geq f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{53}{8}$

Vậy minP $= \dfrac{53}{8}$ khi $(x;y;z) = \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Câu 91: Cho x là số thực thuộc đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$ .Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{5-4x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$

Trường THPT Phan Bội Châu – Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \sqrt{5-4x}$, $b = \sqrt{1+x}$ $\Rightarrow a^2 + 4b^2 = 9$ $(a, b \geq 0)$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $a = 3\sin\alpha$, $2b = 3\cos\alpha$

Khi đó : $P = \dfrac{a-b}{a+2b+6} = \dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 4}$

Xét hàm số $f(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 4}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$f'(\alpha) = \dfrac{4\sin\alpha + 8\cos\alpha - 2}{(2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 4)^2} > 0$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

f(x) đồng biến trên $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = -\dfrac{1}{6}$; $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\min P = -\dfrac{1}{6}$ khi $x = \dfrac{5}{4}$; $\max P = \dfrac{1}{3}$ khi $x = -1$

Câu 92: Cho *x, y* là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\le 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$

Trường THPT Phan Thúc Trực – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\left(\dfrac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2\le 36\Rightarrow x+y+xy\le 5$.

Ta có $5(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2\Rightarrow\sqrt{5(x^2+y^2)}\ge 2x+y$ và

$(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2xy-6x-6y\ge 0\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3)\ge 8(x+y)-(x^2+y^2+3)$

Suy ra $P\ge 2(xy+x+y)-24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t=x+y+xy,\ t\in(0;5]$, $P\ge f(t)=2t-24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t)=2-\dfrac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}}=2\dfrac{\sqrt[3]{(2t+6)^2}-8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}}<0,\forall t\in(0;5]$

$\Rightarrow$ hàm số f(t) nghịch biến trên nửa khoảng $(0;5]$.

Suy ra $\min f(t)=f(5)=10-48\sqrt[3]{2}$

Vậy $\min P=10-48\sqrt[3]{2},\ khi\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Câu 93: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{3b}{b+3}+\dfrac{c}{c+1}\le\dfrac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$

Trường THPT Phù Cừ - Hưng Yên– Lần 1

Lời giải tham khảo

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4}-\frac{2a}{a+2}\right)+\left(\frac{b+3}{4}-\frac{3b}{b+3}\right)+\left(\frac{c+1}{4}-\frac{c}{c+1}\right)\ge\frac{a+b+c+6}{4}-\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{4(a+2)}+\frac{(b-3)^2}{4(b+3)}+\frac{(c-1)^2}{4(c+1)}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{a+2}+\frac{(b-3)^2}{b+3}+\frac{(c-1)^2}{c+1}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$VT(2) \ge \frac{\left[(a-2)+(b-3)+(c-1)\right]^2}{(a+2)+(b+3)+(c+1)} = \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} = VP(2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 3; c = 1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Câu 94: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4(x^4+y^4)}{x^2+y^2} - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$ trong đó a, b là hai số thực dương.

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có : $P \ge \frac{4(x^2+y^2)^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} - (x^2+y^2) + \frac{4}{x^2+y^2} = x^2+y^2+\frac{4}{x^2+y^2}$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}$, với $t = x^2+y^2, t \in (0;+\infty)$.

Ta có : $f(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 2$

Lập bảng biến thiên hàm số f(t) trên khoảng $(0;+\infty)$, ta tìm được :

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = 4$, đạt đươc khi t=2.

Từ đó tìm được GTNN của biểu thức P bằng 4, đạt được khi x=y=1.

Câu 95: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \ge y \ge z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $\frac{x}{z} + xz \ge 2x, \quad \frac{z}{y} + yz \ge 2z$.

Từ đó suy ra $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \ge 2x - xz + 2z - yz + 3y$

$$= 2(x+z) + y(x+y+z) - xz - yz = 2(x+z) + y^2 + x(y-z)$$

Do $x > 0$ và $y \ge z$ nên $x(y-z) \ge 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y\geq 2(x+z)+y^2=2(3-y)+y^2=(y-1)^2+5\geq 5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x=y=z=1$

Câu 96: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a,b\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b)$

Trường THPT Phú Riềng – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo

Do $a,b\leq 1$ nên $(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow ab\geq a+b-1\geq 0$

Suy ra: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\leq (a+b)^2-2(a+b-1)$

Mà $a^5b+ab^5=ab\left(a^4+b^4\right),a^4+b^4\geq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)^2\geq\frac{1}{8}(a+b)^4$

Suy ra: $P\geq\frac{1}{8}(a+b-1)(a+b)^4+\frac{6}{(a+b)^2-2(a+b-1)}-3(a+b)$

Đặt t = (a + b) thì $1\leq t\leq 2,$ xét hàm số $f(t)=\frac{1}{8}(t-1)t^4+\frac{6}{(t-1)^2+1}-3t$

Với $t\in[1;2]$ có $f'(t)=\frac{1}{8}\left(5t^4-4t^3-24\right)-\frac{12(t-1)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}<0\forall t\in[1;2]$

Nên f(t) nghịch biến trên $[1;2]$. Do đó: $f(t)\geq f(2)=-1$

Vậy $MinP=-1$ khi a = b = 1

Câu 97: Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn: a + b + c = $\frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}$

Trường THPT Phú Xuyên B – Lần 1

Lời giải tham khảo

áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 3\sqrt[3]{xyz}\,\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=9\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\quad(*)$$

áp dụng (*) ta có: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}\geq\frac{9}{\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}}$

áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có:

$$\sqrt[3]{(a+3b)1.1}\leq\frac{a+3b+1+1}{3}=\frac{1}{3}(a+3b+2)$$

$$\sqrt[3]{(b+3c)1.1}\leq\frac{b+3c+1+1}{3}=\frac{1}{3}(b+3c+2)$$

$$\sqrt[3]{(c+3a)1.1}\leq\frac{c+3a+1+1}{3}=\frac{1}{3}(c+3a+2)$$

Suy ra $\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\leq\frac{1}{3}\left[4(a+b+c)+6\right]=\frac{1}{3}\left[4.\frac{3}{4}+6\right]=3$

Do đó $P\geq 3$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=\frac{3}{4}\\ a+3b=b+3c=c+3a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $a=b=c=1/4$

Câu 98: Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực không âm thỏa mãn: $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}+\frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1)$.

Trường THPT Quốc Oai – Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử $z=\min\{x;y;z\}$. Đặt $x+\frac{z}{2}=u; y+\frac{z}{2}=v\Rightarrow u,v>0$

Ta có: $x^2+z^2\leq\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{3}{4}z^2-xz\leq 0\Leftrightarrow z(3z-4x)\leq 0$ luôn đúng.

Vậy $x^2+z^2\leq\left(x+\frac{z}{2}\right)^2=u^2; y^2+z^2\leq v^2; x^2+y^2\leq u^2+v^2$.

Mà với $u,v>0$, ta có: $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\geq\frac{4}{u+v}$ và $\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\geq\frac{8}{(u+v)^2}$

Vậy

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\geq\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)$$

$$\geq\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{2uv}+\frac{6}{(u+v)^2}\geq\frac{4}{(u+v)^2}+\frac{6}{(u+v)^2}=\frac{10}{(u+v)^2}=\frac{10}{(x+y+z)^2}$$

Mà $(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=xyz+x+y+z+2\ge x+y+z+2$ Vậy

$P\ge \frac{10}{(x+y+z)^2}+\frac{5}{2}(x+y+z)+5$. Đặt $x+y+z=t;\ t\ge\sqrt{3}$

Xét $f(t)=\frac{10}{t^2}+\frac{5}{2}t+5$ với $t\ge\sqrt{3}$. Ta có: $f'(t)=\frac{-20}{t^3}+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow t^3=8\Leftrightarrow t=2$

Từ đó, ta có: $P\ge f(2)=\frac{10}{2^2}+\frac{5}{2}.2+5=10+\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$.

Khi $x=y=1;z=0$ thì $P=\frac{25}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{2}$.

Câu 99: Cho a,b,c thuôc đoạn [1;2] .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$.

Trường THPT – Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Cho a,b,c thuôc đoạn [1;2] . Tìm GTNN của P = $\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$.

P = $\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$ = $\frac{(a+b)^2}{c^2+4(a+b)c+4ab}$

Ta có 4ab ≤ (a + b)² nên P ≥ $\frac{(a+b)^2}{c^2+4(a+b)c+(a+b)^2}=\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2}{1+4\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2}$

Đặt t = $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ vì a, b , c thuộc [1;2] nên t thuộc [1;4]

Ta có f(t) = $\frac{t^2}{4+4t+t^2}$, f'(t) = $\frac{4t^2+2t}{(1+4t+t^2)^2}$ > 0 với mọi t thuộc [1;4]

Hàm số f(t) đồng biến trên [1;4] nên f(t) đạt GTNN bằng $\frac{1}{6}$ khi t = 1

Dấu bằng xảy ra khi a = b ; $\frac{a+b}{c}$ = 1, a,b,c thuộc [1;2] ⇔ a =b = 1 và c =2

Vậy MinP = $\frac{1}{6}$ khi a =b = 1 và c = 2

Câu 100: Cho các số dương x,y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{2}{3(x+y)^3}.$$

Trường THPT Quỳnh Lưu 3 – Nghệ An– Lần 1

Lời giải tham khảo

Xét biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}-\frac{2}{3(x+y)^3}$

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\le\frac{2}{x+y}$

Thật vậy, $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{x^2+3y^2}+\frac{1}{3x^2+y^2}\right)=\frac{8(x^2+y^2)}{(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)}$

Xét $\frac{8(x^2+y^2)}{(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)}-\frac{4}{(x+y)^2}=\frac{4\left[2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)\right]}{(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)(x+y)^2}$

$=\frac{-4(x-y)^4}{(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)(x+y)^2}\le 0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}\le\frac{2}{x+y}$

Dấu "=" xẩy ra khi x=y

Như vậy, $P\le\frac{2}{x+y}-\frac{2}{3(x+y)^3}$

Đặt, $t=\frac{1}{x+y},t>0$. Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{2t^3}{3}\Rightarrow f'(t)=2-2t^2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$

Ta có bảng biến thiên

t	-∞		-1		1		+∞
f'(t)		-	0	+	0	-	
f(t)				$\nearrow$	4/3	$\searrow$	

Từ BBT ta thấy GTLN của f(t) là 4/3 khi t=1.

Vậy, GTLN của P là 4/3 khi $x = y = \dfrac{1}{2}$

Câu 101: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$.

Sở GD & ĐT Bắc Giang – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$

Đặt $\sqrt{zy} = 2\cos A, \sqrt{xz} = 2\cos B, \sqrt{xy} = 2\cos C$, trong đó A, B, C là các góc nhọn.

Từ giả thiết suy ra

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 \Leftrightarrow (\cos C + \cos(A-B))(\cos C + \cos(A+B)) = 0$

$\Leftrightarrow \cos C + \cos(A+B) = 0$

Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác.

Ta có:

$$z = \frac{2\cos A\cos B}{\cos C}; y = \frac{2\cos A\cos C}{\cos B}; x = \frac{2\cos C\cos B}{\cos A}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2\cos A\cos B\cos C} \geq \frac{8\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}) \geq 4\sin A\sin B\sin C \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A\sin B\sin C} + \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin A\sin B\sin C} + \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3} + \frac{1}{2\left(\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 102: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức::

$$P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x+y)^2}$$

Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc– Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có $y \ge 0$ và $\frac{x^2}{2} \le -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 \le x \le \frac{6}{5}$ và

$x^2 + y^2 \le x^2 + \left(-2x^2 + 3x\right)^2 = 2x^2\left(2x^2 - 6x + 5\right)$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2\left(2x^2 - 6x + 5\right); x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0;\frac{6}{5}\right]}{Max}\ f(x) = 2 \ \Rightarrow x^2 + y^2 \le 2$

$$P = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} \ge \left(x^2 + y^2\right)^2 - \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{2} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow P \ge \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}$ $, 0 < t \le 2$

Xét hàm số:

$g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, t \in (0;2]$

$g'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 2}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$

Lập bảng biến thiên ta có $Min\, P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ $khi\, x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Câu 103: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$.

Sở GD & ĐT Hà Tĩnh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$. Ta có: $a, b, c > 0; abc = 1$ và $P = (a-1)(b-1)(c-1)$

Giả thiết trở thành: $a + b + c + ab + bc + ca = 13 \quad (1)$

Vì $a, b, c > 0; abc = 1$ nên trong ba số a, b, c có tồn tại 1 số, giả sử a có tính chất $0 < a \le 1$.

Từ (1) và $abc = 1$. Ta có: $b + c = \frac{13 - a - \frac{1}{a}}{1 + a}$.

Suy ra:

$$P=a+b+c-ab-bc-ca=2(a+b+c)-13=\frac{2a^3-13a^2+13a-2}{a^2+a}.$$

Xét hàm số: $f(a)=\dfrac{2a^3-13a^2+13a-2}{a^2+a}$ trên $(0;1]$.

Ta có:

$$f'(a)=\frac{2(a^4+2a^3-13a^2+2a+1)}{a^2(a+1)^2}=\frac{2(a^2-3a+1)(a^2+5a+1)}{a^2(a+1)^2}=0\Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Lập bảng biến thiên của f(a) trên (0;1] thu được $f(a)\le f\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{5}$.

Do đó, $P\le\sqrt{5}$. Khi $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};y=1;z=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ thì $P=\sqrt{5}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$.

Câu 104: Cho *a, b, c* là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\dfrac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\dfrac{3}{4}(a+b)^2$.

Sở GD & ĐT Lào Cai – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}\ge\frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2}=\frac{4a^2}{9(b+c)^2}.$$ Tương tự, ta có $$\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\ge\frac{4b^2}{9(c+a)^2}.$$

Suy ra $$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\ge\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}\right)\ge\frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^2$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{ab+c(a+b)+c^2}\right)^2\ge\frac{2}{9}\left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c^2}\right)^2=\frac{2}{9}\left(\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right)^2.$$

Vì $a+b+c=1\Leftrightarrow a+b=1-c$ nên

$$P\ge\frac{2}{9}\left(\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2.\qquad(1)$$

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{8}{9}\left(1-\dfrac{2}{c+1}\right)^2-\dfrac{3}{4}(1-c)^2$ với $c\in(0;1)$.

Ta có $f'(c)=\dfrac{16}{9}\left(1-\dfrac{2}{c+1}\right).\dfrac{2}{(c+1)^2}-\dfrac{3}{2}(c-1);$

$f'(c)=0 \Leftrightarrow (c-1)\left(64-(3c+3)^3\right)=0 \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{3}.$

Bảng biến thiên:

c	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(c)$			0	$+$	
$f(c)$		↘	$-\frac{1}{9}$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(c) \geq -\dfrac{1}{9}$ với mọi $c \in (0;1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq -\dfrac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{1}{9}$, đạt khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 105: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{4a}{b}\left(1+\dfrac{2c}{b}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{bc}{a(b+2c)}+\dfrac{2ca}{b(c+a)}+\dfrac{2ab}{c(2a+b)}$.

Sở GD & ĐT Quảng Nam – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $x=\dfrac{2}{a}, y=\dfrac{4}{b}, z=\dfrac{1}{c}$ $(x, y, z>0)$.

Điều kiện đã cho trở thành: $\dfrac{x^3+y^3}{xyz}+2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=6$ (*)

Ta có: $x^3+y^3 \geq \dfrac{(x+y)^3}{4}$ và $(x+y)^2 \geq 4xy$

Do đó: $\dfrac{x^3+y^3}{xyz} \geq \dfrac{(x+y)^3}{4xyz} \geq \dfrac{4xy(x+y)}{4xyz}=\dfrac{x+y}{z}$

Mặt khác $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$ nên $6=\dfrac{x^3+y^3}{xyz}+2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) \geq \dfrac{x+y}{z}+4 \Rightarrow 0<\dfrac{x+y}{z} \leq 2$.

Ta có: $P=\dfrac{x}{y+2z}+\dfrac{y}{2z+x}+\dfrac{4z}{x+y}=\dfrac{x^2}{xy+2zx}+\dfrac{y^2}{2yz+xy}+\dfrac{4z}{x+y}$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2xy+2z(x+y)}+\frac{4z}{x+y} \geq \frac{(x+y)^2}{\dfrac{(x+y)^2}{2}+2z(x+y)}+\frac{4z}{x+y}=\frac{2(x+y)}{x+y+4z}+\frac{4z}{x+y}$$

Suy ra: $P \ge \dfrac{2\dfrac{x+y}{z}}{\dfrac{x+y}{z}+4}+\dfrac{4}{\dfrac{x+y}{z}}$.

Đặt $t=\dfrac{x+y}{z}$, $0<t\le 2$. Ta có $P \ge \dfrac{2t}{t+4}+\dfrac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t}{t+4}+\dfrac{4}{t}$ $(0<t\le 2)$.

$f'(t)=\dfrac{4(t^2-8t-16)}{t^2(t+4)^2}<0, \ \forall t\in(0;2] \Rightarrow$ f(t) nghịch biến trên (0 ; 2].

Suy ra: $P \ge f(t) \ge f(2)=\dfrac{8}{3}$.

$$P=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \dfrac{x+y}{z}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow 2a=b=4c$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{3}$, khi 2a = b = 4c.

Câu 106: Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2(b+c)}{bc}+\dfrac{b^2(c+a)}{ca}+\dfrac{c^2(a+b)}{ab}$

Trường THPT Trần Cao Vân – Khánh Hoà– Lần 1

Lời giải tham khảo

$$P=\frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}$$

$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab\ge ab \Rightarrow a^3+b^3=(a+b).(a^2+b^2-ab)\ge(a+b).ab$ (1)

$b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc\ge bc \Rightarrow b^3+c^3=(b+c).(b^2+c^2-bc)\ge(b+c).bc$ (2)

$c^2+a^2-ca=(c-a)^2+ca\ge ca \Rightarrow c^3+a^3=(c+a).(c^2+a^2-ca)\ge(c+a).ca$ (3)

$(\forall a,b,c>0)$, $\quad (1)\Leftrightarrow \dfrac{a^3+b^3}{ab}\ge a+b \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\ge a+b$

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{b^3+c^3}{bc}\ge b+c \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{b}\ge b+c$

$(3)\Leftrightarrow \dfrac{c^3+a^3}{ca}\ge c+a \Leftrightarrow \dfrac{c^2}{a}+\dfrac{a^2}{c}\ge c+a$

Suy ra $P\ge 2(a+b+c) \Leftrightarrow P\ge 2$

Vậy $P_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Câu 107: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a+b+c)\left(\dfrac{3a-b}{a^2+ab} + \dfrac{3b-c}{b^2+bc} + \dfrac{3c-a}{c^2+ca}\right)$.

Sở GD & ĐT Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Giả sử $a+b+c=k>0$, đặt $a=kx, b=ky, c=kz \Rightarrow x,y,z>0$ và $x+y+z=1$.

Khi đó $P = k\left[\dfrac{k(3x-y)}{k^2(x^2+xy)} + \dfrac{k(3y-z)}{k^2(y^2+yz)} + \dfrac{k(3z-x)}{k^2(z^2+zx)}\right] = \dfrac{3x-y}{x^2+xy} + \dfrac{3y-z}{y^2+yz} + \dfrac{3z-x}{z^2+zx}$

$$= \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)} + \frac{4y-(y+z)}{y(y+z)} + \frac{4z-(z+x)}{z(z+x)} = \frac{4}{x+y} - \frac{1}{x} + \frac{4}{y+z} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z+x} - \frac{1}{z}$$

$$= \frac{4}{1-z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1-y} - \frac{1}{z} = \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2}.$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b+c>a \Rightarrow y+z>x \Rightarrow 1-x>x$

$\Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$, tức là $x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Tương tự ta cũng có $y,z \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{5t-1}{t-t^2} \le 18t-3$ (*) đúng với mọi $t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{5t-1}{t-t^2} - 18t + 3 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{18t^3-21t^2+8t-1}{t-t^2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2t-1)(3t-1)^2}{t(1-t)} \le 0$ (**)

(**) hiển nhiên đúng với mọi $t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Do đó (*) đúng với mọi $t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Áp dụng (*) ta được $P \le 18x-3+18y-3+18z-3 = 18(x+y+z)-9 = 9$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a=b=c$.

Câu 108: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{8x^2+4xz+5z^2} = 4x + y + 2z$, $x \in [0;5]$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{2z-xy+21} - \sqrt{x+z-xy+10}$.

Sở GD & ĐT Quảng Ninh – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ điều kiện suy ra $x = y; z = 2x$. Khảo sát hàm P …

ĐS : $\text{MaxP} = 4; x = y = 5, z = 10 : MinP = \sqrt{2}; x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$

Câu 109: xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2}$

Sở GD & ĐT Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - (y+z)\right)^2 = 12yz - \frac{3x^2}{4}$

Suy ra $16yz \geq x^2 \Rightarrow 16xyz \geq x^3$

Mặt khác ta có $y^2 + z^2 \geq 2yz \geq \frac{x^2}{8} \Rightarrow -\frac{3x^3}{y^2 + z^2} \geq -24x$

Khi đó $P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2} \geq \frac{x^3}{2} - 24x$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{2} - 24x$ với $x \in (0; +\infty)$

Suy ra $\min\limits_{x \in (0;+\infty)} f(x) = -64$ khi $x = 4 \Rightarrow y = z = 1$

Vậy $\min P = -64$ khi $x = 4, y = z = 1$

Câu 110: Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (xy + xz + 2)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$.

Sở GD & ĐT Nam Định – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết đã cho ta có: $P = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Mà $xy + xz + 1 = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} + y + z = 1$. Đặt $\frac{1}{x} = u, (u > 0)$

Ta có $u + y + z = 1$ và $P = \left(1 + \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Do $u+y+z=1$ suy ra $u,y,z\in(0;1)\Rightarrow\left(1-\frac{4}{3z}\right)<0$

Mà $\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sqrt{uy}}\right)^2\ge\left(1+\frac{2}{u+y}\right)^2=\left(1+\frac{2}{1-z}\right)$

Suy ra $P=\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)\le\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$.

Xét hàm số $f(z)=\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\frac{(z-3)^2}{(z-1)^2}.\frac{3z-4}{3z}$, với $z\in(0;1)$

Ta có $f'(z)=\frac{4(z-3)(2z-3)(2z-1)}{3(z-1)^3z^2}\Rightarrow f'(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

Ta có $P\le f(z)\le-\frac{125}{3}\Rightarrow P\le-\frac{125}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x=4;y=\frac{1}{4};z=\frac{1}{2}$

Vậy $\max P=-\frac{125}{3}$

Câu 111: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(x+z)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\ge2.$$

Trường THPT Sông Lô – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $x^2(y+z)\ge x^2.2\sqrt{yz}=\frac{2x^2}{\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}$,

tương tự $y^2(x+z)\ge2y\sqrt{y};z^2(y+x)\ge2z\sqrt{z}$

$$P\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đặt $a=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y};\ b=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z};\ c=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}$

$\Rightarrow x\sqrt{x}=\dfrac{4c+a-2b}{9}; y\sqrt{y}=\dfrac{4a+b-2c}{9}; z\sqrt{z}=\dfrac{4b+c-2a}{9}$

Do đó $P\geq\dfrac{2}{9}(\;\;)\Rightarrow P\geq\dfrac{2}{9}(\dfrac{4c+a-2b}{b}+\dfrac{4a+b-2c}{c}+\dfrac{4b+c-2a}{a})$

$=\dfrac{2}{9}\left[4\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-6\right]\geq\dfrac{2}{9}(4.3+3-6)=2$

Do $\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{c}{b}.\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{a}}=3$, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{a}}=3$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1.

Câu 112: Cho hai số thực $a,b\in(0;1)$ và thỏa mãn: $(a^3+b^3)(a+b)=ab(1-a)(1-b)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+3ab-a^2-b^2$

Trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 1

Lời giải tham khảo

$MaxP=\dfrac{6}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{9}$ **khi** $a=b=\dfrac{1}{3}$

Câu 113: Cho hai số thực x,y,z và thỏa mãn: $x+y+z=4;\ x^2+y^2+z^2=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(x^3+y^3+z^3)$

Trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 2

Lời giải tham khảo

$MinP=25$ **khi** $x=2; y=z=1$ hoặc các hoán vị.

Câu 114: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=2$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$S=\sqrt{\dfrac{ab}{ab+2c}}+\sqrt{\dfrac{bc}{bc+2a}}+\sqrt{\dfrac{ca}{ca+2b}}$

Trường THPT Tam Đảo – Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

$MaxS=\dfrac{3}{2}$ **khi** $a=b=c=\dfrac{2}{3}$

Câu 115: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $(2+a)(1+b)=\frac{9}{2}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{16+a^4}+4\sqrt{1+b^4}$.

Trường THPT Thạch Thành 1 – Thanh Hoá– Lần 2

Lời giải tham khảo

Chứng minh được : $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\ (*)\forall a,b,c,d$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad=bc \\ ac+bd\geq 0 \end{cases}$

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{Q}{4}=\sqrt{1+\left(\frac{a^2}{4}\right)^2}+\sqrt{1+b^4}\geq\sqrt{4+\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)^2}=\sqrt{4+\frac{(a^2+4b^2)^2}{16}} \quad (1)$$

Mặt khác: $(2+a)(1+b)=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a+2b+ab=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2a+4b+2ab=5$

Mà: $\begin{cases} a^2+1\geq 2a \\ 4b^2+1\geq 4b \\ \frac{a^2+4b^2}{2}\geq 2ab \end{cases}\Rightarrow\frac{3(a^2+4b^2)}{2}+2\geq 2a+4b+2ab=5\Rightarrow a^2+4b^2\geq 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $Q\geq 4.\sqrt{4+\frac{4}{16}}=2\sqrt{17}$. Dấu "=" xẩy ra khi: $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $minQ=2\sqrt{17}$ đạt được khi $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 116: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$

Trường THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $A^3 = P$

Ta có: $A = \left(\frac{1}{ab} - 1\right)\left(\frac{1}{bc} - 1\right)\left(\frac{1}{ca} - 1\right) = \frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dung bất đẳng thức Cauchy ta có:

$1 - ab \geq 1 - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \geq \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$

Tương tự: $1 - bc \geq \frac{(1+a)\sqrt{(1+b)(1+c)}}{2}$; $1 - ca \geq \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó: $A \geq \frac{1}{8}\left[\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2$

Lại có: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 4^3$

Vậy $\min P = 8$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Câu 117: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

Trường THPT Thạch Thành – Thanh Hoá – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6.$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0;8]$.

Ta có $f(0) = 6, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$, $f(8) = 398$. Suy ra $A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ Ta có

$f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 118: Cho a,b,c là những số thực dương và thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{2a^2+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{2}{b}}+\sqrt{2b^2+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{2}{c}}+\sqrt{2c^2+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{2}{a}}$$

Trường THPT Thăng Long - Hà Nội – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$ (1)

Thật vậy

$(1)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}\ge x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}\ge x_1x_2+y_1y_2$

$\Leftrightarrow(x_1y_2-x_2y_1)^2\ge0$

Áp dụng (1) hai lần ta có: $\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}\ge\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$ (2)

Đặt $a+b+c=t\left(t\in\left(0;\frac{3}{2}\right]\right)$, suy ra $abc\le\frac{t^3}{27}$. Áp dụng (2) ta có:

$$P=\sqrt{a^2+\left(a+\frac{1}{ab}\right)^2}+\sqrt{b^2+\left(b+\frac{1}{bc}\right)^2}+\sqrt{c^2+\left(c+\frac{1}{ca}\right)^2}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{abc}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{t^2+\left(t+\frac{27}{t^2}\right)^2}$$

Xét hàm $f(t)=t^2+\left(t+\frac{27}{t^2}\right)^2=2t^2+\frac{54}{t}+\frac{27^2}{t^4}$ trên $\left(0;\frac{3}{2}\right]$.

$$f'(t)=4t-\frac{54}{t^2}-\frac{4.27^2}{t^5}=\frac{4t^3-54}{t^2}-\frac{4.27^2}{t^5}<0,\forall t\in\left(0;\frac{3}{2}\right]$$

Hàm số f(t) liên tục và nghịch biến trên $\left(0;\frac{3}{2}\right]$, do đó:

$$f(t)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{369}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3\sqrt{82}}{2}$$

Khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì dấu bằng xảy ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{82}}{2}$.

Câu 119: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+z^2=xy+5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2x}{x^2+y^2+18}+\frac{y}{x+y+4z}-\frac{4(x+y)}{25z}$.

Trường THPT Thanh Chương – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$x^2+y^2\ge 2xy=2\left(x+y+z^2-5\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+10\ge 2\left(x+y+z^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+18\ge 2\left(x+y\right)+2\left(z^2+4\right)\ge 2\left(x+y\right)+8z=2\left(x+y+4z\right)$

Từ đó suy ra: $\dfrac{2x}{x^2+y^2+18}\le\dfrac{2x}{2\left(x+y+4z\right)}=\dfrac{x}{x+y+4z}$

Khi đó:

Với $t=\dfrac{x+y}{z}>0$, xét hàm số: $f\left(t\right)=\dfrac{t}{t+4}-\dfrac{4t}{25}$

$f'\left(t\right)=\dfrac{4}{\left(t+4\right)^2}-\dfrac{4}{25}$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\\left(t+4\right)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow t=1$

$P\le\dfrac{x}{x+y+4z}+\dfrac{y}{x+y+4z}-\dfrac{4\left(x+y\right)}{25z}$

$=\dfrac{x+y}{x+y+4z}-\dfrac{4\left(x+y\right)}{25z}=\dfrac{\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z}+4}-\dfrac{4\left(x+y\right)}{25z}=f\left(t\right)=\dfrac{t}{t+4}-\dfrac{4t}{25}$

Do đó, suy ra: $f\left(t\right)\le f\left(1\right)=\dfrac{1}{25}\Rightarrow P_{\max}=\dfrac{1}{25}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=z;x=y\\x+y+z^2=xy+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=1\\z=2\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{1}{25}$.

Câu 120: Cho ba số thực không âm x,y,z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}-\frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}.$$

Trường THPT Chuyên Bình Long – Lần 2

Lời giải tham khảo

Với mọi số thực không âm x, y, z Ta có:

$\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\le\dfrac{x+y+4z}{2}\Rightarrow(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\le(x+y)\dfrac{x+y+4z}{2}$

Mặt khác ta có: $(x+y)\dfrac{x+y+4z}{2}=\dfrac{x^2+y^2+2xy+4yz+4zx}{2}\le 2(x^2+y^2+z^2)(1)$

Vì $2xy\le x^2+y^2;\ 4yz\le 2(y^2+z^2);\ 4zx\le 2(z^2+x^2)$

Tương tự ta có $(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}\le (y+z)\dfrac{y+z+4x}{2}\le 2(x^2+y^2+z^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $P\le \dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\dfrac{4}{2(x^2+y^2+z^2)}-\dfrac{5}{2(x^2+y^2+z^2)}$

Hay $P\le \dfrac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\dfrac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$.Đặt $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}$, $t>2$

Khi đó $P\le \dfrac{4}{t}-\dfrac{9}{2t^2-4}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4}{t}-\dfrac{9}{2t^2-4}$, $t>2$

$f'(t)=-\dfrac{4}{t^2}+\dfrac{9t}{(t^2-4)^2}=\dfrac{(4-t)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$

(do $t>2$ nên $4t^3+7t^2-4t-16=4(t^3-4)+t(7t-4)>0$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có

$MaxP=\dfrac{5}{8}$ khi $x=y=z=2$

Câu 121: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\left(a\sqrt{2}+1\right)\left(b\sqrt{2}+1\right)\left(c\sqrt{2}+1\right)}{abc}$

Trường THPT Chuyên Bình Long – Lần 3

Lời giải tham khảo

Sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân cho ba số dương ta được:

$$1=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow \sqrt[3]{abc}\le \frac{1}{3}$$

Ta có $P=\dfrac{\left(a\sqrt{2}+1\right)\left(b\sqrt{2}+1\right)\left(c\sqrt{2}+1\right)}{abc}$

$$=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=2\sqrt{2}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{1}{abc}$$

$$\geq 2\sqrt{2}+2.3.\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}+\sqrt{2}.3.\left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$$

$$=2\sqrt{2}+3.\left(\sqrt{2}\right)^2.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\sqrt{2}.3.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$$

$\geq\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\sqrt{2}+3\right)^3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\left(\sqrt{2}+3\right)^3$.

Câu 122: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+1=c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^3}{a+bc}+\dfrac{b^3}{b+ca}+\dfrac{c^3}{c+ab}+\dfrac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}$.

Trường THPT Chuyên Quang Trung – Bình Phước – Lần 6

Lời giải tham khảo

$$P=\frac{a^3}{(a+b)(b+1)}+\frac{b^3}{(a+b)(a+1)}+\frac{(a+b+1)^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{14}{(a+b+2)\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq\frac{(a+b)^2}{2(a+b+2)}+\frac{4(a+b+1)^3}{(a+b+2)^2}+\frac{28}{(a+b+2)^2}$$

Đặt t=a+b+2 (t>2). $P\geq f(t)=\dfrac{9t}{2}+\dfrac{14}{t}+\dfrac{24}{t^2}-14$

Cách 1: Sử dụng xét hàm, tìm được Min P=$\dfrac{53}{8}$. Khi $a=b=\dfrac{1}{3};c=\dfrac{5}{3}$

Cách 2: Sử dụng Cauchy: $P=\dfrac{14}{t}+\dfrac{63t}{32}+\dfrac{14}{t^2}+\dfrac{81t}{64}+\dfrac{81t}{64}-14\geq\dfrac{53}{8}$.

Câu 123: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn: $z(z-x-y)=x+y+1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^4y^4}{(x+yz).(y+zx).(z+xy)^3}$.

Trường THPT Hùng Vương – Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo:

Vì $z(z-x-y)=x+y+1 \Rightarrow (z+1)(x+y)=z^2-1$ và do $z>0$ nên ta có: $x+y+1=z$.

Khi đó: $T=\dfrac{x^4y^4}{(x+y).(1+y).(x+y).(1+x).\left[(x+1)(y+1)\right]^3}=\dfrac{x^4y^4}{(x+y)^2.\left[(x+1)(y+1)\right]^4}$

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương x, y ta có : $(x+1)^4=\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3}+1\right)^4\ge\left(4\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{27}}\right)^4=4^4.\dfrac{x^3}{27}$,

$(y+1)^4=\left(\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{3}+1\right)^4\ge\left(4\sqrt[4]{\dfrac{y^3}{27}}\right)^4=4^4.\dfrac{y^3}{27}$, $(x+y)^2\ge 4xy$.

Do đó $(x+y)^2.\left[(x+1)(y+1)\right]^4\ge 4xy.4^8.\dfrac{x^3.y^3}{3^6}=\dfrac{4^9}{3^6}.x^4.y^4$ suy ra $T\le\dfrac{3^6}{4^9}$ (*)

Dấu "=" ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=1\\ z=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow x=3, y=3, z=7$.

Vậy GTLN của $T=\dfrac{3^6}{4^9}$ khi x= 3, y =3, z = 7

Câu 124: Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $abc+a+c=b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}$

Trường THPT Lê Hồng Phong – Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết $abc+a+c=b$ ta có $a+c=b(1-ac)>0\Rightarrow b=\dfrac{a+c}{1-ac}$

Khi đó $P=\dfrac{2}{a^2+1}+\dfrac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}-2+\dfrac{3}{c^2+1}\quad(0<a<\dfrac{1}{c})$.

Khảo sát hàm biến a là $f(a)$ với $0<a<\dfrac{1}{c}$ suy ra $f(a)\le\dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}}+\dfrac{3}{c^2+1}=g(c)$

Khảo sát hàm g(c) với $0<c<+\infty$ suy ra $g(c)\le\dfrac{10}{3}$.

Câu 125: Cho các số thực dương a, b, c luôn thoả mãn a+ b + c = 1.

Chứng minh rằng : $\dfrac{a+b^2}{b+c}+\dfrac{b+c^2}{c+a}+\dfrac{c+a^2}{a+b}\ge 2.$

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước – Lần 3

Lời giải tham khảo:

Ta có :$VT=(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})+(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b})=A+B$

$$A+3=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\geq\frac{1}{2}3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}}=\frac{9}{2}$$

$\Rightarrow A\geq\frac{3}{2}$

$1^2=(a+b+c)^2\leq(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a})(a+b+b+c+c+a)\Leftrightarrow 1\leq B.2\Leftrightarrow B\geq\frac{1}{2}$

Từ đó ta có $VT\geq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2=VP$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1/3

Câu 126: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}+\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}+\sqrt{x+y}$.

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có: $2yz+1=x^2+y^2+z^2+2yz=x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)$

Suy ra $2x^2+2yz+1\geq 2x^2+2x(y+z)=2x(x+y+z)\Rightarrow\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}\leq\frac{1}{2}\frac{x}{x+y+z}$

Tương tự $\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}\leq\frac{1}{2}\frac{y}{x+y+z}$.Suy ra $P\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}$

Ta có $x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2(1-z^2)}=\sqrt{2-2z^2}$

Suy ra $P\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$

Xét hàm số $f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$ trên $[0;1]$

$$f'(z)=-\frac{1}{\sqrt{2-2z^2}\left(\sqrt{2-2z^2}+z\right)^2}-\frac{z}{\sqrt[4]{(2-2z^2)^3}}<0 \text{ với } \forall c\in(0;1).$$

Do hàm số liên tục trên $[0;1]$, nên $f(z)$ nghịch biến trên $[0;1]$

Suy ra $P \le f(z) \le f(0) = \frac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$. Dấu = xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Vậy GTLN của P là $\frac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Câu 127: Cho $x > 0$, $y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}$.

Trường THPT Lộc Ninh – Bình Phước– Lần 2

Lời giải tham khảo:

+ Ta có $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$

$\Leftrightarrow xy(x+y) = x + y + 3xy$ (1) do x >0 ; y > 0 nên x + y > 0

(1) $\Rightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \ge \frac{4}{x+y} + 3 \Rightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 4 \ge 0$

$\Rightarrow [(x+y)+1][(x+y)-4] \ge 0 \Rightarrow x + y \ge 4$

(1) $\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+y} = \frac{1}{xy}$

Nên $P = (x + y)^2 + 2 - \frac{1}{xy} = (x + y)^2 + 1 + \frac{3}{x+y}$

+ Đặt x + y = t (t ≥ 4) $\Rightarrow P = t^2 + \frac{3}{t} + 1 = f(t)$

+Ta có $f'(t) = 2t - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^3 - 3}{t^2} > 0$ $\forall t>4$ Nên $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[4;+\infty)$ => $P = f(t) \ge f(4) = \frac{71}{4}$

Hay giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$ khi x= y = 2

Câu 128: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2b^2c^2$.

Trường THPT Nguyễn Du– Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ gt ta có: $\begin{cases} b+c=-a \\ bc=a^2-3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm khi $a^2 \geq 4(a^2-3) \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \in [0;4]$

$F=a^2b^2c^2=a^2(a^2-3)^2=t^3-6t^2+9t,\ t=a^2 \in [0;4]$

$F_t'=3t^2-12t+9;\ F_t'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \in [0;4] \\ t=3 \in [0;4] \end{array}\right.$

$F(0)=F(3)=0;\ F(1)=F(4)=4$

Suy ra $\max F=4$ khi $(a;b;c)=(2;-1;-1)$ hoặc các hoán vị hoặc $(a;b;c)=(-2;1;1)$ hoặc các hoán vị.

Câu 129: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số
$f(x)=\sqrt{5x^2-8x+32}-\sqrt{-3x^2+24x}+\sqrt{3x^2-12x+16}$.

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 3

Lời giải tham khảo

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\dfrac{x^3+1}{x+2} \geq \dfrac{7}{18}x^2+\dfrac{5}{18}(x>0)$ (*)

$(*) \Leftrightarrow 18(x^3+1) \geq (x+2)(7x^2+5)$
$\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \geq 0$ luôn đúng với mọi x>0, d ấu "=" sảy ra khi x=1

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\dfrac{a}{b};\dfrac{b}{c};\dfrac{c}{a}$

$\dfrac{a^3+b^3}{a+2b} \geq \dfrac{7a^2}{18}+\dfrac{5b^2}{18};\ \dfrac{b^3+c^3}{b+2c} \geq \dfrac{7b^2}{18}+\dfrac{5c^2}{18};\ \dfrac{c^3+a^3}{c+2a} \geq \dfrac{7c^2}{18}+\dfrac{5a^2}{18};$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \geq \dfrac{12(a^2+b^2+c^2)}{18}=2$

Vậy MinS =2 khi a=b=c=1

Câu 130: Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd}+\frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd}+\frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 4

Lời giải tham khảo

$a^4+b^4\ge 2a^2b^2$ (1); $b^4+c^4\ge 2b^2c^2$ (2); $c^4+a^4\ge 2c^2a^2$ (3)

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)\Rightarrow a^4+b^4+c^4+abcd\ge abc(a+b+c+d)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}\le\dfrac{1}{abc(a+b+c+d)}$ (4) $\Rightarrow$ **đpcm.**

Câu 131: Cho các số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 5

Lời giải tham khảo

Đặt $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1$

Thật vậy, $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a\left(a+b+c\right)+bc}=\sqrt{a^2+a\left(b+c\right)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$

$\Rightarrow\sqrt{a+bc}\ge\sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=a+\sqrt{bc}$

Tương tự, $\sqrt{b+ac}\ge b+\sqrt{ac}$, $\qquad\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+a+b+c$

$\Leftrightarrow\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1\Rightarrow$ đpcm

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3$

Câu 132: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\dfrac{2}{3x+2y+z+1}+\dfrac{2}{3x+2z+y+1}=(x+y)(x+z).$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}.$

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 6

Lời giải tham khảo

Ta có: $(x+y)(x+z)\le \dfrac{(x+y+x+z)^2}{4}=\dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1}+\frac{1}{3x+2z+y+1}\right)\ge \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{8}{3(2x+y+z)+2}\le \dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt $2x+y+z=t\ (t>0)\Rightarrow \dfrac{8}{3t+2}\le \dfrac{t^2}{4}\Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16)\ge 0$

$$\Leftrightarrow t\ge 2\Rightarrow 2x+y+z\ge 2$$

Mà: $4\le (2x+y+z)^2\le (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $P=\dfrac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2}=1+\dfrac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}$

$$\le 1+\frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}}=1+\frac{36x+6}{3x^2+2}$$

Xét hàm số: $f(x)=1+\dfrac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x>0$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ \ (\text{loại}) \\ x=\dfrac{2}{3}\quad \Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right)=10\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

Suy ra: $f(x)\le 10\Rightarrow P\le 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x=\dfrac{2}{3},y=z=\dfrac{1}{3}$.

Câu 133: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $0<x\le 1,0<y\le 1,0<z\le 1$.Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{xyz}\right)(x+y+z)\ge 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

Trường THPT Nguyễn Du– Lần 7

Lời giải tham khảo

- từ gt có $x-1\quad y-1\ \ge 0\Rightarrow 1\ge x+y-xy\Rightarrow \dfrac{1}{xy}\ge \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-1$

- Do đó $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$

$$P=\left(1+\frac{1}{xyz}\right)\ x+y+z\ =x+y+z+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}.$$

$$\Rightarrow P\geq x+y+z+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$$

$$\geq 2\sqrt{x+y+z\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3$$

$$\geq 2.3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1

Câu 134: Cho ba số thực dương a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S=\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}$.

Trường THPT Nguyễn Du – Lần 8

Lời giải tham khảo

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\frac{x^3+1}{x+2}\geq\frac{7}{18}x^2+\frac{5}{18}(x>0)\ (*)$

$(*)\Leftrightarrow 18(x^3+1)\geq(x+2)(7x^2+5)$
$\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8)\geq 0$

luôn đúng với mọi x>0, d ấu "=" sảy ra khi x=1

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}\geq\frac{7a^2}{18}+\frac{5b^2}{18};\ \frac{b^3+c^3}{b+2c}\geq\frac{7b^2}{18}+\frac{5c^2}{18};\ \frac{c^3+a^3}{c+2a}\geq\frac{7c^2}{18}+\frac{5a^2}{18};$$

Từ các đảng thức trên suy ra $S\geq\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{18}=2$

Vậy MinS =2 khi a=b=c=1

Câu 135: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

Trường THPT Nguyễn Văn Trỗi – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(y+z)^2 \le 2(y^2+z^2) \Rightarrow x(y+z)^2 \le 2x(y^2+z^2) \Leftrightarrow x(y+z)^2 \le 2(y+z) \Rightarrow y+z \le \frac{2}{x}$

Theo BĐT Côsi $(1+y)(1+z) \le \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \le \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \le \frac{(1+x)^2}{x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+y)(1+z)} \ge \frac{x^2}{(1+x)^2}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)} \ge \frac{4x^2}{(1+x)^2}$ (2)

Lại có theo BĐT Côsi $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{(1+y)^2}\frac{1}{(1+z)^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \ge \frac{2}{(1+y)(1+z)}$ (3) . Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \ge \frac{2x^2}{(1+x)^2}$ (4)

Từ (2) và (4) $\Rightarrow P \ge \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} \Leftrightarrow P \ge \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{10x-2}{(1+x)^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Lập BBT $P \ge f(x) \ge f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$. Vậy GTNN của . $P = \frac{91}{108} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}; y = z = 5$.

Câu 136: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} - \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1}\right).$$

Sở GD & ĐT Bình Phước – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có:

$$M = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} \ge 2\sqrt{5}.$$

$$N = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1}\right) \le \frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow P = M - N \ge 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$$

$x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$

Khi $\Rightarrow MinP = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$

Câu 137: Cho a,b,c thuộc khoảng (0;1) thoả mãn $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=1$. Tìm GTNN của biểu thức: P = $a^2+b^2+c^2$.

Sở GD & ĐT Bình Phước – Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có: $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=1 \Leftrightarrow ab+bc+ca = a+b+c-1+2abc$

P= $(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c-1) - 4abc$

Theo Cô si $abc \le (\frac{a+b+c}{3})^3$

Đặt t = a + b + c, ta có:

$P \ge t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{27}t^3$ v ới 0 <t < 3

Khảo sát hàm số trên tìm ra minP =3/4 khi t=3/2 hay a=b=c=1/2

Câu 138: Cho số thực a,b,c không âm sao cho tổng hai số bất kì đều dương. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \ge 6$

Trường THPT Chuyên Biên Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$

Giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó $\sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} \ge \sqrt{\frac{b.b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c.c}{c+b}} = \sqrt{b+c}$

Đặt $t = b+c$ thì $P \ge \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$

Ta có $\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \ge 6(AM-GM)$. Do đó $P \ge 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $a+t=3\sqrt{at}$ và chẳng hạn một bộ (a,b,c) thỏa mãn là $(a,b,c)=\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2};1;0\right)$

Câu 139: Cho số thực m lớn nhất sao cho tồn tại các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $x^3+y^3+z^3+8(xy^2+yz^2+zx^2)=m$

Trường THPT Chuyên Vinh – Lần 2

Lời giải tham khảo

Giả sử tồn tại các số thực x,y,z thỏa mãn yêu cầu bài toán đặt ra.

Không mất tính tổng quát ta giả sử y nằm giữa x và z. Kết hợp với giả thiết ta có

$0\le y\le 2$ và $x(y-x)(y-z)\le 0$

Từ đây ta được $xy^2+yz^2+zx^2\le y(x+z)^2$

Mặt khác do x, z không âm nên $x^3+z^3\le (x+z)^3$

Do đó $m\le (x+z)^3+y^3+8y(x+z)^2=(4-y)^3+y^3+8y(4-y)^2=8y^3-52y^2+80y+64$ (1)

Xét hàm số $f(y)=8y^3-52y^2+80y+64,\quad 0\le y\le 2$. Ta có

$f'(y)=24y^2-104y+80=8(3y^2-13y+10)$

$f'(y)=0, 0\le y\le 2\Leftrightarrow y=1$

Ta có $f(0)=64, f(1)=100, f(2)=80$. Suy ra $f(y)\le f(1)=100, \forall y\in[0;2]$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $m\le 100$

Khi $x=0,y=1,z=3$ ta có dấu đẳng thức

Vậy số m lớn nhất cần tìm là 100

Câu 140: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\left(\frac{a+2\sqrt{ab}+c}{a+1}\right)^2+\left(\frac{b+2\sqrt{bc}+a}{b+1}\right)^2+\left(\frac{c+2\sqrt{ca}+b}{c+1}\right)^2$$

Trường THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – Lần 1

Lời giải tham khảo

$\vec{u}\left(a;\sqrt{2a};1\right);\vec{v}\left(1;\sqrt{2b};c\right)$ =>

$$\left(\frac{a+2\sqrt{ab}+c}{a+1}\right)^2\le 1+2b+c^2;\left(\frac{b+2\sqrt{bc}+a}{b+1}\right)^2\le 1+2c+a^2;\left(\frac{c+2\sqrt{ca}+b}{c+1}\right)^2\le 1+2a+b^2$$

Suy ra : $P\le 3+2(a+b+c)+c^2+a^2+b^2=6+2(a+b+c)\le 12$

Vậy : P lớn nhất bằng 12 đạt được khi a = b = c = 1

Câu 141: Cho x ≥ 0 và y ≥ 0 thỏa mãn điều kiện x + y = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + \dfrac{1}{xy+1}$

Trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $0 \le xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = 1$

Đặt $t = xy$, điều kiện $0 \le t \le 1$

$P = t + \dfrac{1}{t+1} \Rightarrow P' = 1 - \dfrac{1}{(t+1)^2} = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$

x	0		1
P'	0	$+$	
P	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$

Vậy GTLN $P = \dfrac{3}{2}$ Khi $x = 1;\ y = 1$

Câu 142: Cho ba số thực dương x, y, z thuộc đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \dfrac{z}{8(x^2+y^2)} + \dfrac{x^2+y^2-1}{xyz}$.

Trường THPT Hàn Thuyên – Bắc Ninh– Lần 2

Lời giải tham khảo

$\dfrac{x^2+y^2}{xy} \ge 2, (x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 \ge 0 \Rightarrow xy \ge 5 - z \Rightarrow -\dfrac{1}{xyz} \ge \dfrac{-1}{(5-z)z}$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \le z^2 - 10z + 26$

ĐS : $T = \dfrac{1}{2}, x = y = 1; z = 4$

Câu 143: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 32} - \sqrt{-3x^2 + 24x} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16}$

Trường THPT Lê Lợi – Thanh Hoá – Lần 2

Lời giải tham khảo

$f(x)=\sqrt{5x^2-8x+32}-\sqrt{-3x^2+24x}+\sqrt{3x^2-12x+16}\le\sqrt{5x^2-8x+32}+\sqrt{3x^2-12x+16}$

$\le 12\sqrt{2}+4\sqrt{7}$ (Khảo sát hàm 1 biến)

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{\sqrt{5x^2-8x+32}+\sqrt{-3x^2+24x}}+\sqrt{3x^2-12x+16}\ge 2$$

Vậy : P nhỏ nhất bằng 2 đạt được khi x =2 ; P lớn nhất bằng $12\sqrt{2}+4\sqrt{7}$ đạt được khi x = 8

Câu 144: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn : $(bc+1)^2+a^2=2(1+a)+bc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+1+a^2c}{a^2bc}+\dfrac{4}{(c+1)^2}-\dfrac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$

Trường THPT Liên Sơn – Lần 1

Lời giải tham khảo

$$P=\frac{a+1}{a^2bc}+\frac{1}{b}+\frac{4}{(1+c)^2}-\frac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$$

$(bc+1)^2+a^2=2(1+a)+bc\Leftrightarrow b^2c^2+bc=1+2a-a^2=2-(a-1)^2\le 2$

$\Rightarrow bc\le 1\Rightarrow \dfrac{a+1}{a^2bc}\ge\dfrac{a+1}{a^2}$

Vì $\dfrac{1}{b}\ge c\Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{(1+c)^2}\ge c+\dfrac{4}{(1+c)^2}$

Theo Cô-Si $\dfrac{c+1}{2}+\dfrac{c+1}{2}+\dfrac{4}{(1+c)^2}\ge 3\Rightarrow c+\dfrac{4}{(1+c)^2}\ge 2$

Do đó $P\ge\dfrac{a+1}{a^2}+2-\dfrac{12\sqrt{a}}{a^2+1}\ge\dfrac{a+1}{a^2}+2-\dfrac{12\sqrt{a}}{2a}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{6}{\sqrt{a}}+2$

Đặt $t=\dfrac{1}{\sqrt{a}}>0\Rightarrow P\ge t^4+t^2-6t+2$

Xét hàm số $f(t)=t^4+t^2-6t+2$, $t>0$

Có $f'(t)=4t^3+2t-6$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta được $P \geq f(t) \geq -2$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} t = \dfrac{1}{\sqrt{a}} = 1 \\ bc = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Vậy $\min P = -2$ đạt được khi $a = b = c = 1$

Câu 145: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{a^2}{a^2+bc+a+a} + \dfrac{b+c}{a+b+c+1} - \dfrac{1+bc}{9}$

Trường THPT Nghèn – Hà Tĩnh - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đánh giá $a(b+c) \leq 1+bc; 1+bc \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{4}$ ....xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t+1} - \dfrac{t^2}{36}, t \in \left[0;\sqrt{6}\right]$

ĐS : $MaxP = \dfrac{5}{9}$ khi $a=b=1; c=0$ hoặc $a=c=1; b=0$

Câu 146: Cho a,b,c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \dfrac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} + \dfrac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16ab}} + \dfrac{c^2(a+2)}{a}$

Trường THPT Trần Hưng Đạo – ĐăcNông - Lần 1

Lời giải tham khảo

$\sqrt{2a^2+7b^2+16ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq 2a+3b$; $\dfrac{3c^2}{a} + 2c = c^2\left(\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{c}\right) \geq \dfrac{25c^2}{3a+2c}$ Suy ra ....

$P \geq 25\left(\dfrac{a^2}{2a+3b} + \dfrac{b^2}{2b+3c} + \dfrac{c^2}{2c+3a}\right) + c^2 - 2c \geq c^2 - 2c + 15$

Vậy : P nhỏ nhất bằng 14 đạt được khi $a=b=c=1$

Câu 147: Cho a,b,c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$

Trường THPT - Nguyễn Sỹ Sách- Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt : $x=a+b, y=b+c, z=c+a \Rightarrow x+y+z=1$

$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$ tương tự các biểu thức còn lại suy ra $S\le\frac{3}{2}$

Vậy : P lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{6}$

Câu 148: Cho x, y, z là ba số thực không âm và thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}}$

Trường THPT Trung Giã - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)^2=\frac{y+z+2}{yz+y+z+1}+\frac{2}{\sqrt{yz+y+z+1}}\le\left(1+\frac{1}{\sqrt{y+z+1}}\right)^2$$

Suy ra : $\frac{1}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}}\le 1+\frac{1}{\sqrt{y+z+1}}$; $(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2=1\Rightarrow y+z\ge 1-x$

$$\Rightarrow P\le 1+\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\le 2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy : P lớn nhất bằng $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt được khi y =z =0 ; x = 1

Câu 149: Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}.$$

Trường THPT Ischool Nha Trang – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt x =a + b + c; y= b + c + 4a; z = c + a + 16b, ta có x,y,z > 0 và

$a=\frac{y-x}{3}, b=\frac{z-x}{15}, c=\frac{21x-5y-z}{15}$. Khi đó

$$P=\frac{\frac{y-x}{3}+\frac{z-x}{15}}{x}+\frac{\frac{z-x}{15}+\frac{21-5y-z}{15}}{y}+\frac{\frac{21-5y-z}{15}+\frac{y-x}{3}}{z}=\frac{-6x+5y+z}{15x}+\frac{20x-5y}{15y}+\frac{16x-z}{15z}$$

$$=-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\frac{y}{x}+\frac{1}{15}\frac{z}{x}+\frac{4}{3}\frac{x}{y}+\frac{16}{15}\frac{z}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+4\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{15}\left(\frac{z}{x}+16\frac{z}{x}\right)-\frac{4}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P\ge\frac{3}{4}+\frac{8}{15}-\frac{4}{5}=\frac{16}{15}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{16}{15}$ khi $a=\frac{5}{7}c, b=\frac{3}{7}c$.

Câu 150: Cho x, y là hai số thực dương, x + y = 1. Tìm GTNN của P = $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

Trường THPT Ischool – Nha Trang – Khánh Hoà - Lần 2

Lời giải tham khảo

$$P^2=1-2xy-2x^2y^2+2xy+2xy\sqrt{x^2y^2+2xy}$$

Đặt t = xy , $0<t\le\frac{1}{4}$

Xét hs $f(t)=1-2t-2t^2+2t\sqrt{t^2+2t}$ trên $(0;\frac{1}{4}]$

$$f'(t)=-2-4t+2\sqrt{t^2+2t}+\frac{2t(t+1)}{\sqrt{t^2+2t}}<-2-4t+2\sqrt{t^2+2t}<0 \quad \forall t\in(0;\frac{1}{4}]$$

(Vì pt g(t) = $-2-4t+2\sqrt{t^2+2t}=0\Leftrightarrow 3t^2+2t+1=0$ vô nghiệm và $g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}<0$)

Suy ra hs f(t) nghịch biến trên $(0;\frac{1}{4}]\Rightarrow f(t)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow P\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 151: Cho các số thực a, b, c thuộc $[4;6]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=15$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+30abc+180}{ab+bc+ca}-\frac{1}{20}abc$

Trường THPT Thuận Châu – Sơn La - Lần 2

Lời giải tham khảo

+) Biến đổi các đại lượng khác của bài toán theo đại lượng

$t = ab + bc + ca$

Thứ nhất:

$(a-4)(b-4)(c-4) \geq 0 \Leftrightarrow (ab - 4a - 4b + 16)(c-4) \geq 0$

$\Leftrightarrow abc - 4ac - 4bc + 16c - 4ab + 16a + 16b - 64 \geq 0$

$\Leftrightarrow abc - 4t + 16(a+b+c) - 64 \geq 0 \Leftrightarrow abc - 4t + 176 \geq 0$

$\Leftrightarrow abc \geq 4t - 176 \Leftrightarrow -abc \leq -4t + 176$

Suy ra:

$$P = \frac{(ab+bc+ca)^2 + 180}{ab+bc+ca} - \frac{1}{20}abc \leq \frac{t^2+180}{t} - \frac{1}{5}t + \frac{44}{5}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}$$

Thứ 2:

$(a-6)(b-6)(c-6) \leq 0 \Leftrightarrow (ab - 6a - 6b + 36)(c-6) \leq 0$

$\Leftrightarrow abc - 6ac - 6bc + 36c - 6ab + 36a + 36b - 216 \leq 0$

$\Leftrightarrow abc - 6t + 36(a+b+c) - 216 \leq 0$

$\Leftrightarrow abc - 6t + 324 \leq 0 \Leftrightarrow abc \leq 6t - 324$

Kết hợp: $\begin{cases} abc \geq 4t - 176 \\ abc \leq 6t - 324 \end{cases} \Rightarrow 4t - 176 \leq 6t - 324$

$\Rightarrow 2t \geq 148 \Rightarrow t \geq 74$

Thứ 3:

$15^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca) + 3(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3t \geq 3t$

Suy ra $t \leq 75$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}, t \in [74; 75]$$

$$f'(t) = \frac{4}{5} - \frac{180}{t^2} = \frac{4t^2 - 900}{5t^2}$$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 15$

Suy ra $f'(t) \leq 0, t \in [15; 16]$

Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[15; 16]$

suy ra $f(t) \le f(15), t \in [15; 16]$

Giá trị lớn nhất của biểu thức P là:

$f(15) = \frac{4}{5.15} + \frac{180}{15} + \frac{44}{5} = 35$

$P = 35$ khi $a = 4, b = 5, c = 6$ hoặc các hoán vị của $(4, 5, 6)$

Câu 152: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \ge 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Trường THPT Thuận Thành – Bắc Ninh - Lần 2

Lời giải tham khảo

Không giảm tính tổng quát, giả sử a + b + c = 1.

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c}\right) \le 9 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \le 9$

Với $f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta đánh giá $f(x) = \frac{5x-1}{x-x^2} \le 18x - 3, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \le 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Bất đẳng thức này đúng với $\forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Do đó $f(a) + f(b) + f(c) \le 18(a+b+c) - 9 = 9$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$, do đó dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức ban đầu là $a = b = c$

Câu 153: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x+y+z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx}$$

Trường THPT Tô Văn Ơn - Lần 1

Lời giải tham khảo

+ $(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)} \le \frac{(z+1)^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}} \ge \frac{28}{(z+1)^2}$

+ $z+xy=(x+1)(y+1) \le \frac{(z+1)^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{z+xy} \ge \frac{4}{(z+1)^2} \Leftrightarrow \frac{z^3}{z+xy} \ge \frac{4z^3}{(z+1)^2}$

+ $\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx} \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \ge \frac{x^2+y^2}{z+1} \ge \frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$

$P \ge f(z)=\frac{28}{(z+1)^2}+\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}+\frac{4z^3}{(z+1)^2}$

+ $f'(z)=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{3}$

+ *lập bảng biến thiên, ta được* $P \ge f(z) \ge \frac{53}{8} \Rightarrow \min P=\frac{53}{8}, khi\ x=y=\frac{1}{3}, z=\frac{5}{3}.$

Câu 154: Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn xyz + x + z = y .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = $\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$

Trường THPT Tô Văn Ơn - Lần 2

Lời giải tham khảo

+ Vì y = $\frac{x+z}{1-xz}$,nên $\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}=2\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{(1-xz)^2}{(x^2+1)(z^2+1)}\right]$

$=\frac{2z[z(1-x^2)+2x]}{(x^2+1)(z^2+1)} \le \frac{2z[\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}]}{(x^2+1)\sqrt{(z^2+1)}}=\frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}$,Đặt t = $\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Ta có P $\le$-2t + $\frac{3t}{\frac{t^2}{1-t^2}+1}$ = -3t³ + t = f(t) với t $\in$(0;1)

+ Khảo sát ta có kết quả $\underset{(0;1)}{Max} f=f(\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$ đạt được khi z = $\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}y$

Câu 155: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x.y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{3y}{x(y+1)}+\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$

Trường THPT Tôn Đức Thắng - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $a=\frac{1}{x}>0$, $b=\frac{1}{y}>0$ .Theo đề bài ta có:

$$3-(a+b)=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$$

Kết hợp điều kiện $a+b>0$ suy ra $a+b\ge 2$

$$\Rightarrow M=\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}-a^2-b^2$$

$$=3.\frac{(a+b)^2-2ab+a+b}{ab+a+b+1}+\frac{ab}{a+b}-(a^2+b^2)+2ab$$

$$=3.\frac{(a+b)^2-2(3-(a+b))+a+b}{3-(a+b)+a+b}+\frac{3-(a+b)}{a+b}-(a+b)^2+2.(3-(a+b))$$

$$=\frac{1}{4}\left[-(a+b)^2+a+b+2+\frac{12}{a+b}\right]$$

Đặt ;$t=a+b\ge 2$

Xét hàm số: $f(t)=-t^2+t+2+\frac{12}{t}$

$$f'(t)=-2t+1-\frac{12}{t^2}<0,\forall t\ge 2$$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$

$\max\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=6$ Suy ra giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{3}{2}$ khi a=b=1 $\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 156: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\le 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$.

Trường THPT Tôn Đức Thắng - Lần 2

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\left(\dfrac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2\le 36\Rightarrow x+y+xy\le 5$.

Ta có $5(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2\Rightarrow\sqrt{5(x^2+y^2)}\ge 2x+y$ và

$(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2xy-6x-6y\ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3)\ge 8(x+y)-(x^2+y^2+3)$

Suy ra $P\ge 2(xy+x+y)-24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$ \

Đặt $t=x+y+xy,\ t\in(0;5]$, $P\ge f(t)=2t-24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t)=2-\dfrac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}}=2\dfrac{\sqrt[3]{(2t+6)^2}-8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}}<0,\forall t\in(0;5]$

Vậy hàm số f(t) nghịch biến trên nữa khoảng $(0;5]$.

Suy ra $\min f(t)=f(5)=10-48\sqrt[3]{2}$.

Vậy $\min P=10-48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Câu 157: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $.x^3+y^2+z=2\sqrt{3}+1$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^3}$.

Trường THPT Trần Bình Trọng – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

$A=\dfrac{1}{x^2+y^2}+2\left(\dfrac{1}{xy}+2xy+2008\right)$ với : $x>0,y>0,x+y\le 1$.

Ta có: $x>0,y>0$

$x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$, Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Ta có: $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2}{xy}+4xy=\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2xy}\right)+\left(4xy+\dfrac{1}{4xy}\right)+\dfrac{5}{4xy}$

$\dfrac{4}{x^2+2xy+y^2}+2\sqrt{4xy.\dfrac{1}{4xy}}+\dfrac{5}{(x+y)^2}=\dfrac{4}{(x+y)^2}+2+\dfrac{5}{(x+y)^2}=\dfrac{11}{(x+y)^2}\ge 11$

Suy ra $A\ge 2027$, $MinA=2027\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

Câu 158: Cho 3 số thực x;y;z dương thõa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm GTNN của

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

Trường THPT Trần Cao Vân – Khánh Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $y+z=a;z+x=b;\ x+y=c\ suy\,ra\ a+b+c=2$

$$\frac{x^2}{y+z}=\frac{(1-a)^2}{a}=\frac{1}{a}+a-2 \text{ và } P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+(a+b+c)-6=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-4$$

Chứng minh. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}=\frac{9}{2}\Rightarrow P\ge\frac{1}{2}$

Min(P)=$\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Câu 159: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x+y+z\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}}+\frac{y^2}{zx+\sqrt{8+y^3}}+\frac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}.$$

Trường THPT Trần Quang Khải - Lần 3

Lời giải tham khảo

Theo BĐT Bunhiacopxki:

$$P\left[\left(yz+\sqrt{8+x^3}\right)+\left(zx+\sqrt{8+y^3}\right)+\left(xy+\sqrt{8+z^3}\right)\right]\ge(x+y+x)^2$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+\sqrt{8+x^3}+\sqrt{8+y^3}+\sqrt{8+z^3}}$$

Ta có: $\sqrt{8+x^3}=\sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)}\le\frac{2+x+4-2x+x^2}{2}=\frac{6-x+x^2}{2}$

Tương tự: $\sqrt{8+y^3}\le\frac{6-y+y^2}{2}$; $\sqrt{8+z^3}\le\frac{6-z+z^2}{2}$

Suy ra: $P\ge\frac{2(x+y+z)^2}{2xy+2yz+2zx+18-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}$

$$=\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+18}$$

Đặt $t=x+y+z\ (t\ge 3)$. Khi đó: $P\ge \dfrac{2t^2}{t^2-t+18}$

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{2t^2}{t^2-t+18}$ với $t\ge 3$. $f'(t)=\dfrac{2(-t^2+36t)}{(t^2-t+18)}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=36$

BBT

Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\dfrac{3}{4}$ khi $t=3$. khi $\boxed{x=y=z=1.}$

Câu 159: Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2+y^2+(3x-2)(y-1)=0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x+y+8\sqrt{4-x-y}$

Trường THPT Trần Đại Nghĩa – Lần 1

Lời giải tham khảo

+ Ta có $x^2+y^2+(3x-2)(y-1)=0\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=-xy-y$

Vì x,y không âm nên $(x+y)^2-3(x+y)+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x+y\le 2$

Đặt t = x+y khi đó $t\in[1;2]$

Ta có $P=x^2+y^2+x+y+8\sqrt{4-x-y}\le (x+y)^2+(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}$

$P\le t^2+t+8\sqrt{4-t}$

+ Xét hàm $f(t)=t^2+t+8\sqrt{4-t}$ với $t\in[1;2]$

ta có $f'(t)=2t+1-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$ với $t\in[1;2]\Rightarrow f'(t)>3-\dfrac{4}{\sqrt{2}}>0$ với $t\in[1;2]$

và f(t) liên tục trên đoạn [1;2] nên f(t) đồng biến trên đoạn [1;2]

→ $\max\limits_{[1;2]} f(t)=f(2)=6+8\sqrt{2}\Rightarrow f(t)\le 6+8\sqrt{2}$

→ $P\le 6+8\sqrt{2}$, P= $6+8\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}x.y=0\\ t=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

KL: Giá trị lớn nhất của P là $6+8\sqrt{2}$ đạt được khi x = 2 và y = 0

Câu 160: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2+8}+\sqrt{b^2+c^2+8}+\sqrt{c^2+a^2+8}=12$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3$.

Trường THPT – Trần Phú – Vĩnh Phúc - Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $(a^2+b^2+8)+16\geq 8\sqrt{a^2+b^2+8}$ (1)

Tương tự $(b^2+c^2+8)+16\geq 8\sqrt{b^2+c^2+8}$ (2)

$(c^2+a^2+8)+16\geq 8\sqrt{c^2+a^2+8}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, thu được

$2(a^2+b^2+c^2)+3.8+3.16\geq 8(\sqrt{a^2+b^2+8}+\sqrt{b^2+c^2+8}+\sqrt{c^2+a^2+8})$

Mà $\sqrt{a^2+b^2+8}+\sqrt{b^2+c^2+8}+\sqrt{c^2+a^2+8}=12$ suy ra $a^2+b^2+c^2\geq 12$

Ta có $a^3+a^3+8\geq 6a^2; b^3+b^3+8\geq 6b^2; c^3+c^3+8\geq 6c^2$

Suy ra $2(a^3+b^3+c^3)+3.8\geq 6(a^2+b^2+c^2)\geq 6.12$

$a^3+b^3+c^3\geq 24$

Dấu dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. Vậy P đạt giá nhỏ nhất bằng 24

Câu 161: Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn: $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}$.

Trường THPT Trần Thị Tâm - Lần 1

Lời giải tham khảo

Theo giả thiết ta có

$5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2=9(xy+2yz+zx)+10(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2=19x(y+z)+28yz\leq 19x(y+z)+7(y+z)^2$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z}+1\right)\leq \frac{19x}{y+z}+7\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}\leq 2\Leftrightarrow x\leq 2(y+z)$$

Mặt khác ta có $(y+z)^2\leq 2(y^2+z^2)\Leftrightarrow y^2+z^2\geq \dfrac{1}{2}(y+z)^2$

Vì vậy $P\leq \dfrac{2(y+z)}{\frac{1}{2}(y+z)^2}-\dfrac{1}{\left(2(y+z)+y+z\right)^3}=\dfrac{4}{y+z}-\dfrac{1}{27(y+z)^3}$

Đặt $t=y+z>0\Rightarrow P\leq \dfrac{4}{t}-\dfrac{1}{27t^3}=-\dfrac{(6t-1)^2(2t+1)}{27t^3}+16\leq 16$

Vậy $\min P = 16$; dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x = 2(y+z) \\ y = z \\ y + z = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = z = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

Câu 162: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \le 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{4b^2}{(1+2b)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2}$

Trường THPT Triệu Sơn – Thanh Hoá - Lần 1

Lời giải tham khảo

- Ta có: $P = \dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{4b^2}{(1+2b)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2} = \dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2b}+1\right)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2}$

- Đặt $d = \dfrac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \le 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \le 3d$

Mặt khác: $P = \dfrac{1}{(a+1)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{d}{2}+1\right)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2} \ge \dfrac{8}{\left(a + \dfrac{d}{2} + 2\right)^2} + \dfrac{8}{(c+3)^2}$

$$\ge \frac{64}{\left(a + \dfrac{d}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{256}{(2a + d + 2c + 10)^2}$$

- Mà: $2a + 4d + 2c \le a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + d^2 + c^2 + 6 \le 3d + 6$

Suy ra: $2a + d + 2c \le 6$

- Do đó: $P \ge 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a = 1, c = 1, b = \dfrac{1}{2}$

Câu 163: Cho a,b,c thuộc khoảng $(0;1)$ thoả mãn $(\dfrac{1}{a}-1)(\dfrac{1}{b}-1)(\dfrac{1}{c}-1) = 1$. Tìm GTNN của biểu thức P = $a^2 + b^2 + c^2$

Trường THPT DL Lê Thánh Tôn - Lần 1

Lời giải tham khảo

$(\dfrac{1}{a}-1)(\dfrac{1}{b}-1)(\dfrac{1}{c}-1) = 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = a + b + c - 1 + 2abc$

P= $(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c-1) - 4abc$

Theo Cô si $abc \le (\frac{a+b+c}{3})^3$

$P \ge t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{27}t^3$ v ới $t = a+b+c$ (0<t<3)

Khảo sát hàm số tr ên tìm ra minP =3/4 khi t=3/2 hay a=b=c=1/2

Câu 164: Cho các số a, b, c không âm sao cho tổng 2 số bất kì đều dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \ge 6$.

Trường THPT Chuyên Biên Hoà - Lần 1

Lời giải tham khảo

Đặt $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$

Giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó $\sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} \ge \sqrt{\frac{b^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2}{c+b}} = \sqrt{b+c}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \sqrt{\frac{b+c}{a}}$

Đặt $t = b+c$ thì $P \ge \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$

Ta có: $\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \ge 6$ $(AM-GM)$. Do đó $P \ge 6$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $a+t = 3\sqrt{at}$ và chẳng hạn một bộ (a,b,c) thỏa mãn:

$(a,b,c) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2};1;0\right)$.

Câu 165: Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(c+a)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab}\right)$

Trường THPT Đăk-Mil ĐăkNông - Lần 1

Lời giải tham khảo

$$\frac{a^2+bc}{ab+ac}+1\geq 2\sqrt{\frac{a^2+bc}{ab+ac}}\Rightarrow\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}\geq\frac{2a(b+c)}{a^2+bc}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)}}\geq\frac{2a}{(a+b)(a+c)}\ \ldots.$$

$$=> P\geq\frac{1}{4}\left[\frac{2a}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b}{(a+b)(b+c)}\right]+\frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{c}{ab}\right)==> P\geq\frac{1}{4}\left[\frac{4ab+2ac+2bc}{(a+b)(a+c)(b+c)}\right]+\frac{(a^2+1)(b+c)}{4ab}$$

Lại có : $ab+bc+ca=1=>\dfrac{(a^2+1)(b+c)}{4ab}=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4ab}\geq\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4ab+2c(a+b)}$

Suy ra : $P\geq 1$ khi $a=b=1;c=0$

Câu 166: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P=\dfrac{4a}{b+c}+\dfrac{4b}{a+c}-\dfrac{2ab}{c^2}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Trường THPT Chuyên Biên Hoà – Phú Thọ - Lần 2

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết ta có: $\left(\dfrac{a}{c}+1\right)\left(\dfrac{b}{c}+1\right)=4$.

$$P=\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{a+c}-\frac{2ab}{c^2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}=\frac{4\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}+\frac{4\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}-2\frac{a}{c}.\frac{b}{c}+\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}.$$

Đặt $\dfrac{a}{c}=x;\quad \dfrac{b}{c}=y\quad\Rightarrow\begin{cases}x,y>0\\(x+1)(y+1)=4\end{cases}\Rightarrow x+y+xy=3\Rightarrow\begin{cases}0<xy\leq 1\\x+y\leq 2\end{cases}$.

$$P=\frac{4x}{y+1}+\frac{4y}{x+1}-2xy+\sqrt{x^2+y^2}=7-5xy+\sqrt{(xy)^2-8xy+9}$$

$$=7-5t-\sqrt{t^2-8t+9}=f(t)\text{ với } t=xy\quad(0<t\leq 1).$$

Ta có: $f'(t)=-5+\dfrac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+9}}<0$ với $0<t\leq 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$.

$P_{Min}=f(t)_{Min}=f(1)=2-\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 167: Cho a,b,c là ba số thực dương và thỏa mãn: $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

Trường THPT Nguyễn Sỹ Sách - Lần 2

Lời giải tham khảo

Đặt : $x=a+b, y=b+c, z=c+a \Rightarrow x+y+z=1$

$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$ tương tự các biểu thức còn lại suy ra $S\le\frac{3}{2}$

Vậy : P lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{6}$

Câu 168: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5^{2x}+5^{y}$, biết rằng $0\le x;y$ và $x+y=1$

Trường THPT Quỳnh Lưu 2 – Nghệ An - Lần 1

Lời giải tham khảo

Từ giả thiết và điều kiện của x,y ta có : $y=1-x$ và $0\le x\le 1$

Ta có $P=5^{2x}+5^{y}=5^{2x}+5^{1-x}$

Đặt $t=5^{x}$ $\quad 1\le t\le 5$. Ta có $P=t^2+\frac{5}{t};\quad P'=2t-\frac{5}{t^2}\quad P'=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

P(1)=6, P(5)=26, $P\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^2+5\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Ta có $P_{max}=26\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\qquad P_{\min}=\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^2+5\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_5\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\\y=1-\log_5\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\end{cases}$

Câu 169: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2+c^2b^2+1\le 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

Trường THPT – Triệu Sơn 1– Thanh Hoá - Lần 2

Lời giải tham khảo

- Ta có: $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2b}+1\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

- Đặt $d=\frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2+c^2b^2+1\le 3b$ trở thành $a^2+c^2+d^2\le 3d$

Mặt khác: $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{8}{\left(a+\frac{d}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

$$\ge\frac{64}{\left(a+\frac{d}{2}+c+5\right)^2}=\frac{256}{(2a+d+2c+10)^2}$$

- Mà: $2a+4d+2c\le a^2+1+d^2+4+c^2+1=a^2+d^2+c^2+6\le 3d+6$

Suy ra: $2a+d+2c\le 6$

- Do đó: $P\ge 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a=1,c=1,b=\frac{1}{2}$

Câu 170: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\le 7$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$

Trường THPT- Tương Dương – Nghệ An – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2\le 36\Rightarrow x+y+xy\le 5$.

Ta có $5(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2\Rightarrow\sqrt{5(x^2+y^2)}\ge 2x+y$ và

$(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2xy-6x-6y\ge 0\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3)\ge 8(x+y)-(x^2+y^2+3)$

Suy ra $P\ge 2(xy+x+y)-24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t=x+y+xy$, $t\in(0;5]$, $P\ge f(t)=2t-24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t)=2-\frac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}}=2\frac{\sqrt[3]{(2t+6)^2}-8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}}<0,\forall t\in(0;5]$

$\Rightarrow$ hàm số f(t) nghịch biến trên nửa khoảng $(0;5]$.

Suy ra $\min f(t)=f(5)=10-48\sqrt[3]{2}$

Vậy $\min P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, $khi \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 171: Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{b^2 + 3a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 3b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 3c^2}}{ca}$$

Trường THPT Văn Giang – Lần 1

Lời giải tham khảo

Viết lại

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{3}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{3}{a^2}}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{b}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^2}$$

Đặt $\vec{m} = \left(\frac{1}{a}; \frac{\sqrt{3}}{b}\right); \vec{n}\left(\frac{1}{b}; \frac{\sqrt{3}}{c}\right); \vec{p}\left(\frac{1}{c}; \frac{\sqrt{3}}{a}\right)$

Suy ra: $P = |\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}|$

Ta có: $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right)$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ nên $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \left(1; \sqrt{3}\right) \Rightarrow |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}| = 2$

Ta có đánh giá: $|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| \geq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}| = 2$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = c = 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vậy $\min P = 2$

Câu 172: Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = \frac{1}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1 + 4(ab + bc + ca)}{a + b + c + 4abc}$

Trường Trung tâm GDTX Vạn Ninh – Khánh Hoà – Lần 1

Lời giải tham khảo

Với a, b, c là 3 số dương, ta luôn có:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ và $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Nên : $P \le \dfrac{1+4(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt[3]{abc}+4abc} = \dfrac{2-16abc}{3\sqrt[3]{abc}+4abc}$ (1)

....

Mặt khác : $a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ nên : $\dfrac{1}{4}-4abc = a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}\,(t>0)$. Ta có : $\dfrac{1}{4}-4t^3 \ge 3t^2 \Leftrightarrow 16t^3+12t^2-1 \le 0 \Leftrightarrow (t-\dfrac{1}{4})(t+\dfrac{1}{2})^2 \le 0 \Leftrightarrow t \le \dfrac{1}{4}$. Vậy $t \in \left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

....

Do đó từ (1) ta có : $P \le f(t) = \dfrac{2-16t^3}{3t+4t^3};\quad t \in \left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

$f'(t) = \dfrac{-6(16t^3+4t^2+1)}{(3t+4t^3)^2} < 0, \forall t \in \left(0;\dfrac{1}{4}\right] \Rightarrow$ hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$

Do đó $P \le \min\limits_{t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{28}{13}$

....

Vậy GTLN của P là $\dfrac{28}{13}$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{1}{4}$

Câu 173: Cho các số thực dương x,y,z thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2+y^2+z^2+\dfrac{xy+yz+zx}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Trường Trung tâm GDTX Vạn Ninh – Khánh Hoà – Lần 2

Lời giải tham khảo

Áp dụng BĐT TBC-TBN cho hai số dương, ta có

$x^3+xy^2 \ge 2x^2y,\ y^3+yz^2 \ge 2y^2z,\ z^3+zx^2 \ge 2z^2x.$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \ge 2\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)$ (1)

Mặt khác, do $x+y+z=3$ nên

$3\left(x^2+y^2+z^2\right) = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$= x^3+y^3+z^3+\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $x^2+y^2+z^2 \geq x^2y+y^2z+z^2x$.

Do đó $P \geq x^2+y^2+z^2+\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

Đặt $t = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow xy+yz+zx = \dfrac{9-t}{2}$.

Do $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow t \geq 3$

Khi đó $P \geq t+\dfrac{9-t}{2t}, t \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \dfrac{2t^2-t+9}{2t}, t \geq 3$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2-t+9}{2t}$, trên $[3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên, ta có hàm f đồng biến trên $[3;+\infty)$.

$\Rightarrow P \geq \min\limits_{t\geq 3} f(t) = f(3) = 4$.

Kết luận được : $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 174: Cho $x, y, z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2}+\frac{1}{z^2+x^2+2}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

Trường THPT Xuân Trường - Nam Định – Lần 1

Lời giải tham khảo

Ta có $x^2+y^2+2 = (x^2+1)+(y^2+1) \geq 2(x+y),....;\ \sqrt{xy} \leq \dfrac{xy+1}{2},...$

Nên $P \leq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}+xy+yz+zx+3\right]$.

Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\le\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\frac{27}{8(xy+yz+zx)}+\frac{3}{8}$$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}\left[\frac{27}{8(xy+yz+zx)}+xy+yz+zx+\frac{27}{8}\right]$

Đặt $t=xy+yz+zx$.

Do $x,y,z\in[0;2]\Rightarrow(2-x)(2-y)(2-z)\ge 0\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge\frac{4+xyz}{2}\ge 2\Rightarrow t\ge 2$

Mặt khác: $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2=3\Rightarrow t\le 3$. Vậy $t\in[2;3]$

Ta có $P\le\frac{1}{2}\left[\frac{27}{8t}+t+\frac{27}{8}\right]=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t\in[0;2]$ ta có $f'(t)=\frac{1}{2}\left[t-\frac{27}{8t^2}\right]=\frac{8t^3-27}{16t^2}>0\ \forall t\in[2;3]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;3]$. $\Rightarrow f(t)\le f(3)=\frac{15}{4}$.

Do $P\le f(t)\Rightarrow P\le\frac{15}{4}$. Có $P=\frac{15}{4}$ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Tài liệu không thể tránh được những lỗi các bạn vui long kiểm tra và sửa nhé !

Chia sẻ vì cộng đồng, hãy góp cho nhau 1 chút để đạt giá trị lớn lao hơn … thanks